

UNIwersytet MIKOŁAJA KOPERNIKA
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania
Katedra Ekonometrii i Statystyki

Joanna Górka

**Wybrane reprezentacje stochastyczne
ekonomicznych szeregów czasowych**

(praca doktorska)

Promotor: Prof. dr hab. Józef Stawicki

Toruń 2000

SPIS TREŚCI

Wstęp	3
Rozdział I Charakterystyka reprezentacji	
 procesów stochastycznych.....	6
1.1 Wprowadzenie.....	6
1.2 Reprezentacja ARMA	8
1.3 Reprezentacja przestrzeni stanów	18
1.4 Reprezentacja procesów stochastycznych w dziedzinie częstości	30
Rozdział II Zależności pomiędzy reprezentacjami	
 procesów stochastycznych.....	46
2.1 Reprezentacja ARMA a reprezentacja w dziedzinie częstości	46
2.2 Model ARMA a model przestrzeni stanów.....	47
2.3 Model przestrzeni stanów a spektrum.....	52
2.4 Przykłady transformacji modeli	54
2.5 Funkcja największej wiarygodności dla modelu przestrzeni stanów.....	58
Rozdział III Analiza numeryczna ekonomicznych	
 szeregów czasowych.....	60
3.1 Analiza własności generowanych szeregów	60

3.2 Zastosowanie różnych reprezentacji do modelowania 73	73
i prognozowania danych finansowych	
3.3 Wnioski 83	83
Zakończenie 84	84
Dodatek 87	87
Literatura 109	109

WSTĘP

Ekonomiczne szeregi czasowe stanowią realizacje ekonomicznych procesów stochastycznych. Ich analizie poświęconych jest wiele najnowszych publikacji, zarówno w postaci monografii, jak i artykułów naukowych. Do opisu i analizy procesów gospodarczych wykorzystywane są wciąż doskonalsze modele ekonometryczne. Wszystkie one mają na celu lepiej opisać dane zjawiska ekonomiczne i uzyskać lepsze wyniki prognostyczne. Różne modele opisujące mechanizm rozwoju zjawiska w czasie nie wykluczają się, a wręcz przeciwnie pozwalają lepiej poznać własności szeregu czasowego. Często model jednego typu można zapisać w postaci innego modelu. Dzieje się tak przy dodatkowych założeniach lub nawet bez nich. Trudno też o bezwzględną wyższość jednego modelu nad drugim. Wybór modelu zależy od stosowanych kryteriów oraz narzędzi badawczych.

W niniejszej pracy rozważane są stacjonarne procesy stochastyczne. Do ich analizy wybrano trzy reprezentacje: reprezentację ARMA, reprezentację przestrzeni stanów oraz reprezentację w dziedzinie częstości. Modele w reprezentacji przestrzeni stanów są rzadziej spotykane w literaturze ekonometrycznej niż bardziej popularne modele w reprezentacji ARMA czy reprezentacji w dziedzinie częstości. Dotyczy to zarówno teoretycznego opisu reprezentacji jak i aplikacji ekonomicznych. Szczególnie rzadko występują zastosowania reprezentacji przestrzeni stanów do ekonomicznych procesów stochastycznych z czasem dyskretnym. W literaturze polskiej nie było jak dotąd przykładu wykorzystania reprezentacji przestrzeni stanów do analizy szeregów czasowych.

Celem pracy jest teoretyczna i empiryczna analiza związków pomiędzy poszczególnymi reprezentacjami oraz ocena ich przydatności w analizach ekonomicznych. Opisana zostanie matematyczna równoważność omawianych reprezentacji.

Szczególna uwaga poświęcona zostanie walorom aplikacyjnym poszczególnych reprezentacji, zwłaszcza własnościom prognostycznym.

Rozważania prowadzone w niniejszej pracy skupione są wokół następujących tez:

- wybór reprezentacji procesu stochastycznego zależy od charakteru procesu oraz od informacji jakie chcemy uzyskać,
- poszczególne reprezentacje stacjonarnego szeregu czasowego są teoretycznie równoważne,
- różne reprezentacje tego samego szeregu czasowego nie wykluczają się, a raczej pozwalają pełniej zrozumieć badany proces stochastyczny.

Praca składa się z trzech rozdziałów, wstępu, zakończenia i dodatku.

W rozdziale pierwszym oprócz bardzo krótkiego wprowadzenia do pojęć związanych z procesami stochastycznymi przedstawione zostały trzy badane reprezentacje: reprezentacja ARMA, reprezentacja przestrzeni stanów oraz reprezentacja w dziedzinie częstości. Omówione zostały własności prezentowanych modeli, sposoby estymacji parametrów oraz kryteria wyboru modelu.

Przedmiotem drugiego rozdziału są zależności występujące pomiędzy poszczególnymi reprezentacjami. Szczególną uwagę zwrócono na związki poszczególnych reprezentacji z reprezentacją przestrzeni stanów. Celem ilustracji podano kilka przykładów pokazujących przekształcenia jednego modelu w drugi.

Głównym celem rozdziału trzeciego jest empiryczna weryfikacja równoważności teoretycznej poszczególnych modeli. Analiza empiryczna przeprowadzona została w zastosowaniu do modeli AR(2) i ARMA(2,1). Wybór rzędu modeli nie jest przypadkowy. Po pierwsze analiza PS modeli niższego rzędu nie jest interesująca, a po wtóre spośród modeli o wyższych rzędach najczęściej spotykanymi są właśnie modele AR(2) lub ARMA(2,1). W praktyce ekonometrycznej modele o wyższych rzędach opóźnień występują rzadko. Zaproponowano wykorzystanie modelu PS do prognozowania kierunku zmiany wartości szeregu. W tym celu przeprowadzono szereg eksperymentów numerycznych, których wyniki zamieszczono w rozdziale III oraz w dodatku do pracy. Empiryczna analiza ekonomiczna dotyczy wybranych pro-

cesów obserwowanych na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych oraz produkcji sprzedanej przemysłu w okresie I.1991 – VIII.1999.

ROZDZIAŁ I

Charakterystyka reprezentacji procesów stochastycznych

1.1 Wprowadzenie

DEFINICJA 1.1.1

Funkcję losową $\{z(t), t \in T\}$ dla rzeczywistych wartości t , oznaczających zmienną czasową, nazywamy *procesem stochastycznym*¹.

Proces stochastyczny opisuje zatem strukturę probabilistyczną ciągu obserwacji. Opisany jest przez rodzinę rozkładów:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) = P[z(t_1) < z_1, z(t_2) < z_2, \dots, z(t_n) < z_n],$$

o skończonych wymiarach. Proces taki może być procesem z czasem ciągłym (zmienna t ciągła), jak i z czasem dyskretnym (zmienna t jest skokowa i przyjmuje wartości całkowite). Poniższe charakterystyki są przedstawione dla procesów z czasem dyskretnym jako, że obserwacje analizowanych procesów ekonomicznych dokonuje się w dyskretnych odstępach czasu. Poprzez szereg czasowy rozumiemy pewną realizację procesu stochastycznego.

Proces stochastyczny można wygodnie opisać poprzez charakterystyki momentowe takie jak: wartość średnia (moment zwykły pierwszego rzędu):

$$m_t = E(z_t), \tag{1.1.1}$$

¹ Por. Talaga, Zieliński (1986) s.12.

i funkcja autokowariancji (moment centralny drugiego rzędu):

$$K(t, s) = E[(z_t - m_t)(z_s - m_s)]. \quad (1.1.2)$$

Gdy $t = s$ funkcja opisana wzorem (1.1.2), nosi nazwę wariancji.

Ważną klasę procesów stochastycznych stanowią procesy stacjonarne. Warunkami koniecznymi stacjonarności są:

1. stała wartość średnia:

$$m = E(z_t) = \text{const}, \quad (1.1.3)$$

2. stała wariancja:

$$K(t, t) = \text{const}, \quad (1.1.4)$$

3. funkcja autokowariancji (1.1.2) zależna tylko od wartości $\tau = t - s$:

$$K(\tau) = E[(z_t - m)(z_{t-\tau} - m)]. \quad (1.1.5)$$

DEFINICJA 1.1.2

Proces stochastyczny $\{z_t, t \in T\}$ nazywamy *stacjonarny w szerszym sensie*² (słabo stacjonarny) jeśli spełnione są warunki (1.1.3)–(1.1.5).

W pracy rozważania zostaną ograniczone do jednowymiarowych procesów stacjonarnych z czasem dyskretnym.

Podstawowym narzędziem służącym do identyfikacji modeli jest funkcja autokorelacji, która przy odstępie τ wyrażona jest wzorem:

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)}. \quad (1.1.6)$$

DEFINICJA 1.1.3

Funkcja rzeczywista $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest *nieujemnie zdefiniowana*³ wtedy i tylko wtedy, gdy:

² Ang. weakly stationary.

³ Por. Brockwell, Davis (1991) s.26, Gouriéroux, Monfort (1997) s.122, Priestley (1981) s.109.

$$\bigvee_{n \in N_+} \bigvee_{a_i, a_j \in R} \bigvee_{t_i \in C} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \kappa(t_i - t_j) \geq 0.$$

Twierdzenie 1.1.1

Funkcja rzeczywista określona na zbiorze liczb całkowitych jest funkcją autokowariancji pewnego procesu stacjonarnego wtedy i tylko wtedy, gdy jest parzysta i nieujemnie zdefiniowana.

Przy odstępzie τ autokowariancja procesu liniowego:

$$z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad (1.1.7)$$

gdzie ε_t jest procesem białego szumu (tzn. $E(\varepsilon_t) = 0$, $K(0) = \sigma_\varepsilon^2$, $K(\tau) = 0$, dla $\tau > 0$), zaś $\psi_0 = 1$,

dana jest następującym wzorem:

$$K(\tau) = E[z_t z_{t+\tau}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+\tau}. \quad (1.1.8)$$

Wygodnym sposobem otrzymania autokowariancji procesu liniowego jest wykorzystanie funkcji tworzącej autokowariancję:

$$K(B) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} K(\tau) B^\tau, \quad (1.1.9)$$

gdzie B jest operatorem przesunięcia wstecz, wariancja procesu $K(0)$ jest współczynnikiem przy $B^0 = 1$, a autokowariancja przy odstępzie τ , jest współczynnikiem zarówno przy B^τ jak i przy $B^{-\tau}$. Funkcję tworzącą autokowariancję (1.1.9) procesu liniowego można zapisać też w postaci:

$$K(B) = \sigma_\varepsilon^2 \psi(B) \psi(B^{-1}). \quad (1.1.10)$$

1.2 Reprezentacja ARMA

Model ARMA jest modelem szeroko opisanym w literaturze (Por. Box, Jenkins (1983), Brockwell, Davis (1991), (1996), Gouriéroux, Monfort (1997), Greene (1993), Hamilton (1994), Harvey (1993) i wiele innych) jak również stosowanym

w praktyce ekonometrycznej (Por. np.: Bazeli (1995), (1999), Kufel (1995), Ostasiewicz (1998), Talaga (1995)).

Reprezentacja ARMA procesu stochastycznego z_t ma postać:

$$\phi(B)z_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (1.2.1)$$

gdzie:

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ jest operatorem autoregresji rzędu p ,

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ jest operatorem średniej ruchomej rzędu q , zaś

ε_t jest procesem białego szumu,

$$\text{lub } z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (1.2.2)$$

UWAGA 1.2.1

Proces opisany równaniem (1.2.1) jest:

- *stacjonarny* jeżeli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego $\phi(B) = 0$ nie leżą na okręgu jednostkowym⁴,
- *przyczynowy*⁵ jeżeli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego $\phi(B) = 0$ leżą na zewnątrz okręgu jednostkowego⁶.
- *odwracalny* jeżeli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego $\theta(B) = 0$ leżą na zewnątrz okręgu jednostkowego.

Zatem stacjonarność modelu ARMA jest pojęciem szerszym niż przyczynowość modelu ARMA. Proces stacjonarny (1.2.1) można zapisać w postaci (1.1.7), tzn.:

$$z_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad (1.2.3)$$

⁴ Por. Brockwell, Dawis (1991, 1996 str.83) oraz Osiewalski, Pipień (1999).

⁵ Ang. causality. Przyczynowość modelu ARMA jest pojęciem odmiennym aniżeli przyczynowość procesów ekonomicznych (patrz np. Zieliński (1991)).

⁶ Por. Brockwell, Dawis (1991) s.85 i (1996) s.83, Osiewalski, Pipień (1999) s.45, Stawicki (1993) s.32.

gdzie:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1, \\ \psi_j &= \sum_{i=1}^{\min(p,j)} \phi_i \psi_{j-i} - \theta_j, \quad j > q \Rightarrow \theta_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Gourieroux, Monfort (1997) zdefiniowali pojęcie minimalnej reprezentacji ARMA w następujący sposób.

DEFINICJA 1.2.1

Proces stacjonarny z_t ma *minimalną reprezentację* $\text{ARMA}(\underline{p}, \underline{q})$ jeśli można go opisać równaniem (1.2.1), gdzie:

1. $\phi_{\underline{p}} \neq 0, \quad \theta_{\underline{q}} \neq 0$,
2. z_t jest przyczynowy i odwracalny (uwaga 1.2.1),
3. wielomiany $\phi(B), \theta(B)$ nie mają wspólnych pierwiastków,
4. ε_t jest procesem białego szumu z wariancją $\sigma^2 \neq 0$.

Zatem minimalna reprezentacja ARMA gwarantuje stacjonarność i odwracalność modelu. Model ARMA, który posiada minimalną reprezentację można zapisać zarówno w postaci nieskończonego modelu średniej ruchomej $\text{MA}(\infty)$ (1.2.3) jak i w postaci nieskończonego modelu autoregresyjnego $\text{AR}(\infty)$:

$$\varepsilon_t = \phi(B)\theta^{-1}(B)z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z_{t-j}, \quad (1.2.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 1, \\ \pi_j &= \sum_{i=1}^{\min(q,j)} \theta_i \pi_{j-i} - \phi_j, \quad j > p \Rightarrow \phi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

W przypadku modelu AR parametry autoregresji można wyrazić poprzez układ równań współczynników autokorelacji zwanych równaniami Yule'a-Walkera⁷:

$$\begin{cases} R(1) = \phi_1 + \phi_2 R(1) + \dots + \phi_p R(p-1) \\ R(2) = \phi_1 R(1) + \phi_2 + \dots + \phi_p R(p-2) \\ \vdots \\ R(p) = \phi_1 R(p-1) + \phi_2 R(p-2) + \dots + \phi_p \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Rozwiązując układ równań (1.2.5) otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{p}_p, \quad (1.2.6)$$

$$\text{gdzie: } \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}, \mathbf{p}_p = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(p) \end{bmatrix}, \mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} 1 & R(1) & R(2) & \dots & R(p-1) \\ R(1) & 1 & R(1) & \dots & R(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R(p-1) & R(p-2) & R(p-3) & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Zastępując wartości teoretyczne autokorelacji autokorelacją próbkową otrzymujemy oszacowania Yule'a-Walkera parametrów modelu AR. Innym sposobem otrzymania wartości parametrów modelu AR jest zastosowanie MNK. Estymatory MNK daje takie same wyniki jak estymatory największej wiarygodności, zaś oszacowania Yule'a-Walkera parametrów autoregresyjnych w pewnych sytuacjach mogą się różnić od oszacowań MNK. Estymatory Yule'a-Walkera są pożyteczne jako oszacowania początkowe.

Do estymacji parametrów modelu ARMA stosuje się metodę największej wiarygodności. Niech logarytm funkcji wiarygodności dany jest wzorem:

$$\ln L(\phi, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_\varepsilon^2 - \frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma_\varepsilon^2}, \quad (1.2.7)$$

gdzie:

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=-M}^n [E(\varepsilon_t | \phi, \theta, \mathbf{z})]^2,$$

⁷ Wyprowadzenie równań można znaleźć m.in. w pracy Box, Jenkins (1983) str.63, Talaga, Zieliński (1986) str.135, zaś same równania Yule'a-Walkera i ich zastosowania w pracach Brockwell, Davis (1991) i (1996), Choi (1992), Gouriéroux, Monfort (1997), Hamilton (1994), Harvey (1993), Wei (1990).

M – dostatecznie duża liczba całkowita taka, że dla $t \leq -(M+1)$ wartość $E(z_t | \phi, \theta, \mathbf{z}) - E(z_{t-1} | \phi, \theta, \mathbf{z})$ jest mniejsza od ustalonej z góry wartości ε .

Wybrane zostają te oceny wartości parametrów ϕ, θ dla których funkcja (1.2.7) osiąga maksimum. Zatem należy zminimalizować $S(\phi, \theta)$. Estymacja parametrów modelu ARMA dzieli się na dwa etapy. W pierwszym etapie otrzymuje się oszacowania początkowe parametrów, zaś w drugim modyfikuje się początkowe wartości parametrów tak, aby zminimalizować sumę kwadratów reszt. W literaturze ekonometrycznej można znaleźć różne sposoby wyznaczania zarówno wartości początkowych parametrów jak i minimalizacji kwadratu reszt⁸. Poniżej zaprezentowany został algorytm Newtona-Raphsona.

OSZACOWANIA POCZĄTKOWE PARAMETRÓW

Oszacowania parametrów autoregresji otrzymuje się poprzez rozwiązanie układu p równań liniowych:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi}_0 = \mathbf{x}, \quad (1.2.8)$$

gdzie: $A_{ij} = c_{|q+i-j|}$, $x_i = c_{q+i}$, $i, j = 1, 2, \dots, p$,

c_k – wartość estymatora autokowariancji przy odstępnie k .

Do wyznaczenia parametrów średniej ruchomej stosuje się algorytm Newtona-Raphsona. W pierwszym kroku wyznaczany jest ciąg zmodyfikowanych kowariancji:

$$c'_j = \begin{cases} \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^p \hat{\phi}_{i0} \hat{\phi}_{k0} c_{|i+j-k|} & \text{dla } p > 0 \ (\hat{\phi}_{00} = -1) \\ c_j & \text{dla } p = 0 \end{cases}, \quad (1.2.9)$$

gdzie: $j = 0, 1, \dots, q$, zaś

$\hat{\phi}_{j0}$ – j -tym elementem wektora $\hat{\boldsymbol{\phi}}_0$, który otrzymujemy w wyniku rozwiązania równania (1.2.8) oraz

wartości początkowe wektora $\boldsymbol{\tau}^T$:

$$\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_0 \quad \tau_1 \quad \dots \quad \tau_q], \text{ gdzie } \tau_0 = \sqrt{c'_0}, \quad \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_q = 0.$$

Następnie wyznacza się wektor $\mathbf{f}^T$:

$$\mathbf{f}^T = [f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_q], \text{ gdzie } f_j = \sum_{i=0}^{q-j} \tau_i \tau_{i+j} - c'_j, \quad (1.2.10)$$

macierz $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{q-1} & \tau_q \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_q & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_q & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_q \\ 0 & \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_0 \end{bmatrix},$$

oraz rozwiązuje się względem wektora $\mathbf{h}$ równie macierzowe:

$$\mathbf{T}^i \mathbf{h} = \mathbf{f}^i, \quad (1.2.11)$$

gdzie indeks górny oznacza i -tą iterację algorytmu. Wektor $\mathbf{h}$ wyznacza poprawki dla wektora $\boldsymbol{\tau}$ przy kolejnej iteracji, tzn.:

$$\boldsymbol{\tau}^{i+1} = \boldsymbol{\tau}^i - \mathbf{h}. \quad (1.2.12)$$

Dla tak wyznaczonego nowego wektora $\boldsymbol{\tau}$ powtarza się operacje (1.2.10)-(1.2.12).

Powyższa procedura iteracyjna jest zakończona gdy:

$$|f_j| < \varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots, q, \quad (1.2.13)$$

gdzie ε jest pewną zadana wartością. Wówczas oszacowania parametrów średniej ruchomej otrzymujemy z wzoru⁹:

$$\hat{\theta}_{j0} = -\frac{\tau_j}{\tau_0}, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (1.2.14)$$

MINIMALIZACJA SUMY KWADRATÓW RESZT

Wartości parametrów, które minimalizują sumę kwadratów reszt można otrzymać stosując metodę optymalizacji z ograniczeniem zaproponowaną przez

⁸ Między innymi w pracach Box, Jenkins (1983), Brockwell, Davis (1996), Choi (1992).

⁹ Wzór na oszacowanie stałej i wariancji białego szumu można znaleźć w pracy Box, Jenkins (1983), str.494.

Marquardta. Poniżej zostanie przedstawiony algorytm Marquardta w zmodyfikowanej przez Wilsona wersji (por. Box, Jenkins (1983), str.499).

Niech wektor $\beta^T = [\beta_{1,0} \quad \beta_{2,0} \quad \dots \quad \beta_{k,0}]$ zawiera wszystkie parametry modelu ARMA. Dane są również wartości początkowe:

β_0 – oszacowania początkowe parametrów,

π, F_2 – parametry ograniczające procedurę poszukiwań,

ε – parametr zbieżności.

Etap 1.

Niech

$$\beta^T = [\beta_{1,0} \quad \dots \quad \beta_{i,0} + \delta_i \quad \dots \quad \beta_{k,0}],$$

ε' – wektor reszt modelu ARMA dla parametrów β ,

ε – wektor reszt modelu ARMA dla parametrów β_0 .

Wówczas oblicza się następujące wartości według wzorów:

$$x_{i,t} = \frac{1}{\delta_i} (\varepsilon_t - \varepsilon'_t), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1.2.15)$$

$$\mathbf{A}_{k \times k} = \{A_{ij}\}, \quad \text{gdzie} \quad A_{ij} = \sum_{t=M}^T x_{i,t} x_{j,t}, \quad (1.2.16)$$

$$\mathbf{g}^T = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_k], \quad \text{gdzie} \quad g_i = \sum_{t=m}^T x_{i,t} \varepsilon_t, \quad (1.2.17)$$

$$D_i = \sqrt{A_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1.2.18)$$

Etap 2

Poprzez unormowanie i nałożenie ograniczeń modyfikuje się wartości macierzy $\mathbf{A}$ oraz wektora $\mathbf{g}$, tzn.:

$$A_{ij}^* = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{D_i D_j} & i \neq j, \\ 1 + \pi & i = j, \end{cases} \quad (1.2.19)$$

$$g_i^* = \frac{g_i}{D_i}. \quad (1.2.20)$$

Następnie rozwiązując równanie:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{h}^* = \mathbf{g}^*, \quad (1.2.21)$$

względem wektora $\mathbf{h}^*$ oraz wyliczając wektor:

$$\mathbf{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_k], \quad \text{gdzie} \quad h_i = \frac{h_i^*}{D_i}, \quad (1.2.22)$$

uzyskuje się poprawki parametrów wektora β_0 . Nowe wartości parametrów oblicza się według wzoru:

$$\beta = \beta_0 + \mathbf{h}. \quad (1.2.23)$$

Dla nowych wartości parametrów oblicza się sumę kwadratów reszt $S(\beta)$.

Etap 3

1. Jeśli $S(\beta) < S(\beta_0)$, to bada się czy:

$$|h_i| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1.2.24)$$

Jeśli warunek (1.2.24) zachodzi dla wszystkich i , to uznaje się, że nastąpiła zbieżność parametrów, co kończy algorytm Marquardta. Końcowymi wartościami parametrów modelu są wartości obliczone zgodnie z wzorem (1.2.23).

Jeśli warunek (1.2.24) nie zachodzi, to β_0 przyjmuje wartość β , zaś π zmniejsza się F_2 -krotnie. Następnie powraca się do etapu 1.

2. Jeśli $S(\beta) > S(\beta_0)$, to parametr π zwiększa się F_2 -krotnie i przechodzi do etapu 2.

WYZNACZANIE RZĘDU AUTOREGRESJI I RZĘDU ŚREDNIEJ RUCHOMEJ

Do wyznaczenia rzędu autoregresji p oraz rzędu średniej ruchomej q można wykorzystać funkcję autokorelacji z próby i funkcję autokorelacji cząstkowej z pró-

by¹⁰. Innymi użytecznymi narzędziami wyznaczenia rzędu p oraz q są kryteria informacyjne. Kryteria te bazują na resztach modelu. W pracy Choi (1992) zaprezentowano wiele bardziej i mniej znanych metod identyfikacji rzędu autoregresji i rzędu średniej ruchomej. Najczęściej wykorzystywanymi kryteriami wyboru rzędu modelu (1.2.1) są:

- kryterium informacyjne Akaike (AIC):

$$AIC = n \ln \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + 2M, \quad (1.2.25)$$

gdzie n jest liczbą obserwacji, M liczbą zmiennych objaśniających, zaś $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ jest estymatorem największej wiarygodności wariancji reszt.

Wybrany zostaje model, dla którego utrata informacji jest najmniejsza, to znaczy taki model, dla którego AIC przyjmuje wartość najmniejszą,

- bayesowskie rozszerzenie minimum AIC (BIC):

$$BIC = (n - M) \ln \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{n - M} + n \ln n + M \ln \frac{\hat{\sigma}_z^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{M}, \quad (1.2.26)$$

gdzie $\hat{\sigma}_z^2$ jest wariancją szeregu.

Wybrany zostaje model dla którego BIC jest najmniejsze. Jeśli BIC i AIC mają minima dla różnych rzędów p , q , to w wyborze kierujemy się kryterium BIC ¹¹. Kryterium BIC jest modyfikacją kryterium AIC i koryguje skłonność AIC do używania zbyt dużej liczby parametrów.

- bayesowskie kryterium Schwartz'a (SC):

$$SC = n \ln \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + M \ln n. \quad (1.2.27)$$

Wybór modelu jest dokonywany na podstawie minimalnej wartości kryterium.

- kryterium błędu predykcji (FPE)¹²:

¹⁰ Metodę doboru rzędów oraz metodę estymacji funkcji autokorelacji i funkcji autokorelacji cząstkowej zaproponowali Box i Jenkins. W literaturze można spotkać się z nazwą metoda Boxa-Jenkinsa.

¹¹ Por. Brockwell, Davis (1991).

¹² Ang. final prediction error.

$$FPE = \frac{n+p}{n-p} \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2. \quad (1.2.28)$$

Wybrany zostaje model, dla którego FPE przyjmuje wartość najmniejszą. Im większa wartość FPE tym p jest mniejsze. Kryterium tym posługujemy się tylko wówczas gdy mamy do czynienia z procesem $AR(p)$.

Poniżej przytoczono za Beguin, Gourieroux, Monfort (1980) twierdzenie, które jest praktycznym sposobem wyznaczenia rzędów minimalnej reprezentacji ARMA.

TWIERDZENIE 1.2.1

Proces stacjonarny z_t ma minimalną reprezentację $ARMA(\underline{p}, \underline{q})$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{i \geq \underline{p}} \forall_{j \geq \underline{q}} \Delta(i, j) = 0,$$

$$\Delta(\underline{p}, \underline{q} - 1) \neq 0,$$

$$\Delta(\underline{p} - 1, \underline{q}) \neq 0,$$

gdzie

$$\Delta(i, j) = \det \begin{bmatrix} K(j+1) & K(j+2) & \dots & K(j+i+1) \\ K(j) & K(j+1) & \dots & K(j+i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(j+1-i) & K(j+2-i) & \dots & K(j+1) \end{bmatrix}.$$

Z wielkości $\Delta(i, j)$ budowana jest tablica (zwana C-tablicą):

j	0	1	2	...	$\underline{q}-1$	$\underline{q}$	...
i							
0	x	x	x	...	x	x	...
1	x	x	x	...	x	x	...
2	x	x	x	...	x	x	...
...	...	...	...	...	...	...	...
$\underline{p}-1$	x	x	x	...	x	x	x
$\underline{p}$	x	x	x	...	x	0	0
...	...	...	...	...	x	0	0

$$x \Leftrightarrow \Delta(i, j) \neq 0,$$

$$0 \Leftrightarrow \Delta(i, j) = 0,$$

przy pomocy której można ocenić wielkości $\underline{p}$ oraz $\underline{q}$ dla procesu ARMA.

Przedstawiona powyżej metoda identyfikacji wielkości p oraz q nosi nazwę metody „corner”. Metoda ta może również służyć do identyfikacji minimalnej reprezentacji ARMA sumy procesów¹³.

1.3 Reprezentacja przestrzeni stanów

Pojęcie przestrzeni stanów, jak i równania stanu jest od dawna znane w naukach fizycznych i technicznych. Teoria przestrzeni stanów jest w naukach ścisłych wykorzystywana do badania systemów dynamicznych (jest podstawową metodą opisu, analizy i projektowania). Zainteresowanie przestrzenią stanów przez ekonomistów (ekonomia matematyczna, ekonometria, cybernetyka ekonomiczna, badania operacyjne) jest na tyle duże, iż w prawie każdej współcześnie publikowanej książce o dynamicznych procesach stochastycznych, można znaleźć conajmniej jeden rozdział dotyczący tego zagadnienia¹⁴. W polskiej literaturze ekonometrycznej oprócz artykułu Grzesiaka (1995) brak jest opisu reprezentacji przestrzeni stanów jako reprezentacji równoważnej do reprezentacji ARMA, czy też reprezentacji w dziedzinie częstości. Nie oznacza to jednak, iż problem ten nie był podejmowany. Na przełomie lat siedemdziesiątych oraz osiemdziesiątych powstało kilka artykułów na ten temat¹⁵. W ostatnich 10-ciu latach w Polsce, przestrzeń stanów jest wykorzystana do sterowania optymalnego¹⁶ oraz filtru Kalmana¹⁷.

Model przestrzeni stanów (dalej PS) zyskał dużą popularność dzięki filtrowi Kalmana¹⁸, ponieważ estymacja za pomocą filtru Kalmana daje nie gorsze, a w niektórych przypadkach lepsze rezultaty niż klasyczne metody ekonometryczne. Próbę przydatności filtru Kalmana do estymacji modeli procesów gospodarczych w Polsce, przedstawił Skrzypek w artykule z 1985 roku. W literaturze często spotyka się zatem nie tyle modele PS, co modele ekonometryczne zapisane w postaci modelu PS. Tak

¹³ Por. Stawicki, Górka (1995).

¹⁴ Por. Brockwell, Davis (1991), Fahrmeir, Tutz (1996), Gouriéroux, Monfort (1997), Hamilton (1994), Harvey (1993), Wei (1990) i wiele innych.

¹⁵ Por. Litwa (1985), Michalczyńska-Litwa (1977), Sikorski (1980), Wąsik (1977), Wąsik, Litwa, Skrzypek (1986), *Zastosowanie ...* (1982).

¹⁶ Por. Strzała (1994), Witkowska (1993).

¹⁷ Por. Grzesiak (1995), (1997), (1999), Osińska (2000).

¹⁸ Zapis modelu w postaci przestrzeni stanów jest niezbędnym warunkiem zastosowania filtru Kalmana.

więc najczęściej nie szacuje się niezależnego modelu PS, tylko zapisuje się dany model ekonometryczny jako model PS.

Stan jest to minimalna liczba niezależnych danych w pełni charakteryzujących „położenie” układu dynamicznego w danej chwili, pozwalający jednoznacznie przewidzieć zachowanie się układu w przyszłości. Zakładamy, że znany jest stan początkowy (w chwili t_0). W chwili t stan można zapisać w postaci funkcji czasu:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T. \quad (1.3.1)$$

Wektor $\mathbf{x}(t)$ nazywamy wektorem stanu, zaś zmienne $x_1(t), x_2(t), \dots$ zmiennymi stanu. Przestrzeń wyznaczoną przez wektory stanu $\mathbf{x}(t)$, nazywamy przestrzenią stanów. Wymiar przestrzeni stanów jest równy liczbie zmiennych stanu.

Model przestrzeni stanów¹⁹, opisany jest poprzez równanie stanu (1.3.2) oraz równanie wyjścia (obserwacji) (1.3.3):

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{D}_t \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{G}_t \cdot \mathbf{w}_t, \quad (1.3.2)$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \quad (1.3.3)$$

gdzie:

$\mathbf{x}_t - n$ - wymiarowy wektor stanu,

$\mathbf{z}_t - m$ - wymiarowy wektor wyjścia (obserwacji),

$\mathbf{u}_t - r$ - wymiarowy wektor sterowania,

$\mathbf{v}_t - m$ - wymiarowy wektor błędu pomiaru (biały szum),

$\mathbf{w}_t - p$ - wymiarowy wektor zakłóceń (biały szum),

$\mathbf{F}_t$ – macierz $(n \times n)$ stanu, przedstawiająca powiązania pomiędzy poszczególnymi zmiennymi stanu,

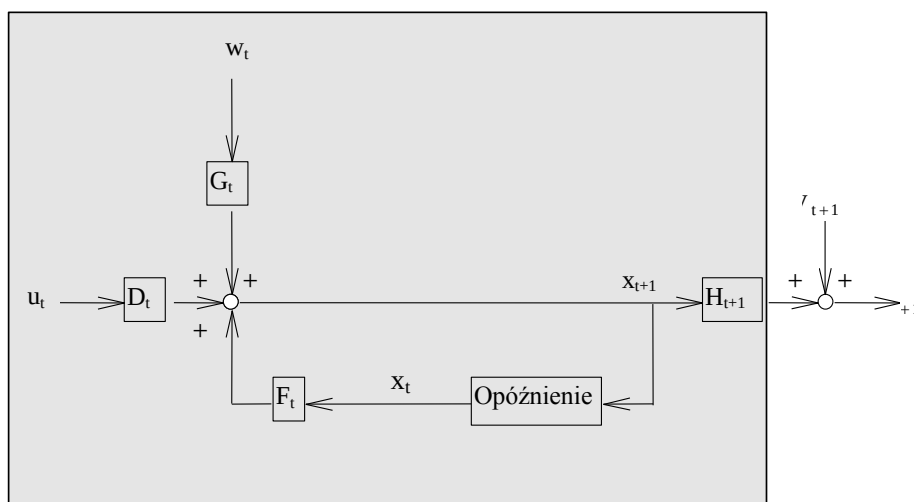
$\mathbf{D}_t$ – macierz $(n \times r)$ sterowania, która pokazuje sposób oddziaływania sterowań (wymuszeń), na zmienne stanu,

¹⁹ Bardziej szczegółowy opis stanu oraz przestrzeni stanów można znaleźć w pracach: Aoki (1990), Brockwell, Davis, (1996), Gouriéroux, Monfort (1997), Grzesiak (1995), Gutenbaum, (1975), Michalczewska-Litwa (1977), Ogata (1974), Wąsik, Litwa, Skrzypek, (1986) i wielu innych.

G_t – macierz ($n \times p$) zakłócenia, reprezentująca sposób przenoszenia zakłóceń na poszczególne elementy,

H_t – macierz ($m \times n$) wyjścia, która pokazuje w jaki sposób zmienne stanu są transformowane na zmienne wyjścia.

Model opisany równaniami (1.3.2) i (1.3.3) jest przedstawiony na rysunku 1.3.1.



Rys. 1.3.1. Schemat blokowy przestrzeni stanów

Schemat blokowy ukazuje nie tylko istotę przestrzeni stanów, ale także istotę zjawisk ekonomicznych w ogóle. To co można zaobserwować (zmierzyć, zważyć, ...), to zaledwie efekt końcowy wielu procesów. Równanie wyjścia pokazuje w jaki sposób zmienne stanu wpływają na obserwacje. Zmiany odbywające się wewnątrz procesu, opisane są za pomocą równania stanu. Zmienne występujące w modelu ekonometrycznym z opóźnieniem większym niż jeden okres, są nowymi zmiennymi stanu²⁰.

²⁰ Takie podejście można znaleźć w pracach: Michalczevska-Litwa (1977), Ogata (1974), Wei (1990).

Dla jednowymiarowego procesu stacjonarnego z_t model PS ma postać:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_t, \quad (1.3.4)$$

$$z_t = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t. \quad (1.3.5)$$

DEFINICJA 1.3.1

Stacjonarny proces stochastyczny $\{z_t, t \in T\}$ ma reprezentację przestrzeni stanów jeśli istnieje model przestrzeni stanów procesu $\{z_t\}$ opisany równaniami (1.3.4–1.3.5).

Macierze $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ modelu PS (1.3.4–5), wyznaczają trzy ważne własności dynamiczne: stabilność²¹, obserwowalność²² oraz sterowalność²³. Pojęcia oraz kryteria, sterowalności i obserwowalności wprowadził Kalman. Zanim zostaną zdefiniowane własności modelu PS, przedstawimy dwie nieskończone macierze:

- macierz obserwowalności: $\mathbf{O} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{HF} \quad \mathbf{HF}^2 \quad \dots]^T$,
- macierz sterowania: $\mathbf{C} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{FG} \quad \mathbf{F}^2\mathbf{G} \quad \dots]$.

DEFINICJA 1.3.2

Model opisany równaniami (1.3.4–5) jest *stabilny* wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy $\mathbf{F}$ leżą wewnątrz koła jednostkowego.

Stabilność modelu PS jest dogodnym warunkiem gwarantującym stacjonarność procesu $\{\mathbf{x}_k\}$, a w konsekwencji i procesu $\{z_t\}$ (por. Anderson, Moore (1984), Brockwell, Davis (1991)). Definicje pozostałych dwu własności można znaleźć między innymi w pracach Anderson, Moore (1984), Brockwell, Davis (1991), Gourioux, Monfort (1997), Gutenbaum (1975), Meditch (1975) i wielu innych. Autorzy nie są zgodni co do podstawowej definicji, jednak można wysnuć następujący wniosek, który jest zgodny z kryteriami zaproponowanymi przez Kalmana w 1960 roku.

²¹ Ang. stability.

²² Ang. observability.

²³ Ang. controllability (reachability).

WNIOSEK 1.3.1

Model PS opisany równaniami (1.3.4–5) jest:

- *obserwowalny* jeżeli rząd macierzy obserwowalności $\mathbf{O}$ jest równy wymiarowi wektora stanu,
- *sterowalny* jeżeli rząd macierzy sterowania $\mathbf{C}$ jest równy wymiarowi wektora stanu.

Inną koncepcję przedstawił Aoki (1990). Para $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ jest obserwowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wektora własnego $\mathbf{w}$ macierzy $\mathbf{F}$ zachodzi implikacja:

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (1.3.5)$$

Założmy, że wartości własnej λ macierzy $\mathbf{F}$ odpowiada wektor własny $\mathbf{u}$. Wówczas para $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ jest sterowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla wektora własnego $\mathbf{u}^T$ macierzy $\mathbf{F}$, spełniającego równanie $\mathbf{u}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{u}^T$, zachodzi implikacja:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{G} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (1.3.6)$$

Innymi słowy, sterowalność to ciąg sterowań sprowadzających układ z dowolnego punktu w przestrzeni stanów do dowolnego zadanego punktu w tej przestrzeni, zaś obserwowalność to układ, dla którego na podstawie obserwacji można określić wektor stanu. Pojęcie obserwowalności i sterowalności są dla układów liniowych pojęciami dualnymi (por. Meditch (1975) s.53).

Zarówno ze względów obliczeniowych, jak i ze względu na własności modelu PS, dąży się do minimalizacji wymiaru wektora stanu (minimalnej realizacji).

DEFINICJA 1.3.3

Minimalnym wymiarem reprezentacji przestrzeni stanów nazywamy możliwy najmniejszy wymiar wektora stanu. Oznaczmy go jako $\underline{K}$.

DEFINICJA 1.3.4

Model przestrzeni stanów opisany równaniami (1.3.4–5) nazywamy *minimalnym modelem* PS jeśli macierz $\mathbf{F}$ jest wymiarów $\underline{K} \times \underline{K}$.

Zauważmy, że minimalny model reprezentacji przestrzeni stanów istnieje i nie jest on jedynym w swoim rodzaju. Zatem, jeżeli istnieje inny równoważny model o minimalnym wymiarze, to jest on również modelem minimalnym. Pomiędzy wymiarem modelu PS a jego sterowalnością oraz obserwowalnością istnieje ścisła zależność.

TWIERDZENIE²⁴ 1.3.1

Model PS jest modelem minimalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest on obserwowalny i sterowalny.

Zatem znalezienie modelu minimalnego gwarantuje nam dwie z trzech własności modelu PS. Jednym ze sposobów wyznaczenia minimalnego wymiaru PS jest wyznaczenie rzędu macierzy Σ (1.3.16) lub, równoważnie, ilości niezerowych wartości szczególnych macierz Hankela (1.3.15). Inny sposób wyznaczenia minimalnego wymiaru zostanie przedstawiony w rozdziale II.

Do estymacji zmiennych stanu modelu PS, przy założeniu znajomości macierzy $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ wykorzystuje się filtr Kalmana²⁵.

Niech dany będzie model PS postaci:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{G} \cdot \mathbf{w}_t, \quad (1.3.7)$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \quad (1.3.8)$$

zaś $E[\mathbf{w}_t] = 0$, $E[\mathbf{v}_t] = 0$ dla $t = 0, 1, \dots$,

$$E[\mathbf{w}_j \mathbf{w}_t^T] = \mathbf{Q}_t \delta_{jt}, \quad E[\mathbf{v}_j \mathbf{v}_t^T] = \mathbf{R}_t \delta_{jt}, \quad \text{dla } j, t = 0, 1, \dots,$$

Oznaczmy przez $\hat{\mathbf{x}}_{t,k}$ oszacowaną wartość $\mathbf{x}_t$ na podstawie k obserwacji.

²⁴ Cytowane twierdzenie, jak i jego dowód można znaleźć w pracy Gourieroux, Monfort (1997) s.279.

²⁵ Filtr Kalmana jest szeroko opisany w literaturze (por. Aoki (1990), Anderson, Moore (1984), Belsley (1973), Borooah, Chakravarty (1979), Brockwell, Davis (1991), Fahrmeir, Tutz (1996), Gourieroux, Monfort (1997), Grzesiak (1995), (1997), (1999), Gutenbaum (1975) i wiele innych).

TWIERDZENIE²⁶ 1.3.2

1. Ocena optymalna przy filtracji $\hat{\mathbf{x}}_{t+1,t+1}$ jest dana przez równanie rekurencyjne:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1,t+1} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{t,t} + \mathbf{K}_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{t,t}), \quad (1.3.9)$$

$t = 0, 1, \dots$, przy czym $\hat{\mathbf{x}}_{0,0} = \mathbf{O}$.

2. $\mathbf{K}_{t+1}$ jest macierzą o wymiarach $n \times m$ określoną przez układ równań:

$$\mathbf{K}_{t+1} = \mathbf{P}_{t+1,t} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{t+1,t} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{t+1})^{-1}, \quad (1.3.10)$$

$$\mathbf{P}_{t+1,t} = \mathbf{F} \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_t \mathbf{G}^T, \quad (1.3.11)$$

$$\mathbf{P}_{t+1,t+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{t+1} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{P}_{t+1,t}, \quad (1.3.12)$$

dla $t = 0, 1, \dots$, przy czym $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową o wymiarach $n \times n$, zaś

$\mathbf{P}_{0,0} = E[\tilde{\mathbf{x}}_{0,0} \tilde{\mathbf{x}}_{0,0}^T] = E[\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T] = \mathbf{P}_0$ jest warunkiem początkowym dla równania (1.3.11).

3. Proces stochastyczny $\{\tilde{\mathbf{x}}_{t+1,t+1}, t = 0, 1, \dots\}$ zdefiniowany przez równanie błędu filtracji:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1,t+1} = \mathbf{x}_{t+1} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1,t+1}, \quad (1.3.13)$$

$t = 0, 1, \dots$ jest procesem Gaussa-Markowa o zerowej wartości średniej i macierzy kowariancji danej równaniem (1.3.12).

Twierdzenie to jest podstawowym twierdzeniem o filtracji w układach liniowych dyskretnych. Pierwszy udowodnił je Kalman w 1960 roku. Stąd też algorytm opisany w punkcie 1. i 2. twierdzenia 1.3.1 nazywa się *filtrem Kalmana*. Macierz $\mathbf{K}$ nazywa się macierzą Kalmana, macierzą filtru lub też macierzą wag. Ze względu na swoją rekurencyjną formę filtr Kalmana zyskał dużą popularność. Jest on stosowany do estymacji zmiennych stanu, do wygładzania i predykcji o jeden krok w przód²⁷. Obecnie jest on nie tylko szeroko opisany w literaturze, ale również niektóre programy komputerowe zawierają algorytm filtru Kalmana (np. RATS, EvIEWS, TSP,

²⁶ Zacytowane twierdzenie to, dla dowolnego modelu PS (niekoniecznie stacjonarnego), można znaleźć w pracy Meditcha (1975) s.149, tamże dowód twierdzenia.

²⁷ Ang. one-step prediction. Opis tych zastosowań, jak i postać filtru Kalmana w szczególnych przypadkach można znaleźć w pracach: Anderson, Moore (1984), Belsley (1973), Borooah, Chakravarty (1979), Brockwell, Davis (1991), Fahrmeir, Tutz (1996), Gouriéroux, Monfort (1997), Grzesiak (1995), (1997), (1999), Gutenbaum (1975) i wiele innych.

SsfPack 2.2). Do wykorzystania filtru Kalmana wymagana jest znajomości macierzy $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$. Macierze te najczęściej otrzymuje się w wyniku odpowiedniego zapisu znanego już modelu ekonometrycznego. W wyżej wymienionych programach komputerowych dostępne są procedury, które zapisują dany model ekonometryczny w postaci modelu PS, brak jest natomiast procedur znajdujących wartości macierzy $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$. Podobnie jest w literaturze. Większość publikacji zawiera jedynie model PS jako inny zapis modelu ekonometrycznego, zaś brak jest niezależnego szacowania modelu PS. Szczególnie brak jest przykładów empirycznych dla modelu PS o wymiarze większym niż jeden. W pracy Aoki (1990) można znaleźć zarówno stosunkowo łatwe estymatory macierzy $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, jak i wiele przykładów empirycznych modelu przestrzeni stanów²⁸. Poniżej zostaną opisane dwa typy estymatorów. Estymator pierwszego typu bazuje na teorii realizacji stochastycznych²⁹, zaś estymator drugiego typu to estymator zmiennych instrumentalnych. Chociaż, ogólnie estymator zmiennych instrumentalnych jest asymptotycznie efektywniejszy od estymatora realizacji stochastycznych, to dla pewnych podklas procesów VAR, estymator pierwszego typu jest tak samo asymptotycznie efektywny jak estymator drugiego typu. Estymator pierwszego typu jest szybszy pod względem obliczeniowym.

Dla szeregu z_t oznaczmy wektor danych w przód $\mathbf{z}_t^+ = [z_t \ z_{t+1} \ \dots]^T$ oraz wektor danych w tył $\mathbf{z}_{t-1}^- = [z_{t-1} \ z_{t-2} \ \dots]^T$. Przez:

$$R_+ = E(\mathbf{z}_t^+ \mathbf{z}_t^{+T}) \text{ i } R_- = E(\mathbf{z}_{t-1}^- \mathbf{z}_{t-1}^{-T}), \quad (1.3.14)$$

oznaczmy odpowiednio macierz kowariancji wektora w przód oraz odpowiednio wektora w tył, zaś przez $\mathbf{H}$ oznaczmy macierz:

$$\mathbf{H}_{J,S} = \begin{bmatrix} K(1) & K(2) & K(S) \\ K(2) & K(3) & K(S+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K(J) & K(J+1) & K(J+S-1) \end{bmatrix}, \quad (1.3.15)$$

²⁸ Przedmiotem rozważań są przede wszystkim ekonometryczne modele wielorównaniowe lub modele VAR.

²⁹ Ang. the stochastic realization theory; estymator ten jest sugerowany przez literaturę dotyczącą teorii realizacji deterministycznej, zaproponowany przez Aoki w 1983 roku.

zwaną macierzą Hankela. Macierz ta jest macierzą kowariancji pomiędzy z_t^+ i z_{t-1}^- . Ogólnie, macierz Hankela definiowana jest jako macierz nieskończona³⁰. Do estymacji wykorzystuje się skończoną kwadratową macierz Hankela. Macierz $\mathbf{H}$ można rozłożyć względem wartości szczególnych³¹ (osobliwych) na iloczyn macierzy:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (1.3.16)$$

gdzie $\mathbf{\Sigma}$ jest macierzą diagonalną, zaś $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ macierzami ortogonalnymi. Teoretycznie rząd macierzy Hankela jest równy liczbie dodatnich wartości szczególnych macierzy $\mathbf{H}$.

ESTYMATOR REALIZACJI STOCHASTYCZNYCH

Dla poszczególnych macierzy modelu PS (1.3.4) – (1.3.5) dane są estymatory³²:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \mathbf{H}^A \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.3.17a)$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \mathbf{H}_{\bullet,1}, \quad (1.3.17b)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{1,\bullet} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.3.17c)$$

gdzie:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}},$$

$\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}$ - pseudoodwrotność Mooro-Penrosa,

$\mathbf{H}_{\bullet,1}$, $\mathbf{H}_{1,\bullet}$ są odpowiednio pierwszą kolumną oraz pierwszym wierszem macierzy $\mathbf{H}$,

$\mathbf{H}^A$ - macierz³³ kowariancji pomiędzy z_{t+1}^+ i z_{t-1}^- ,

$$\text{zaś } \mathbf{M} = E(\mathbf{x}_{t+1} z_t^T) = \mathbf{F} \mathbf{\Pi} \mathbf{H}^T + \mathbf{G} \Delta, \quad (1.3.18)$$

³⁰ Por. Aoki (1990), Gouriéroux, Monfort (1997), Wei (1990).

³¹ Ang. Singular value decomposition – SVD. Rozkład macierzy względem wartości szczególnych oraz opis algorytmu SVD jest przedstawiony w pracy Kielbaśińskiego, Schwetlicka (1992) s.46.

³² Wyprowadzenie wzorów na poszczególne estymatory można znaleźć w pracy Aoki (1990) s.108.

³³ Macierz Hankela z dodatkowym wierszem.

gdzie $\mathbf{\Pi} = E(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t^T)$, $\Delta = E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T)$.

Z porównania wymiarów poszczególnych macierzy w równaniu (1.3.16) oraz równaniu (1.3.17a) wynika, że wymiary macierzy $\hat{\mathbf{F}}$ oraz macierzy $\mathbf{H}$ są takie same. Ponieważ wymiary macierzy stanu $\mathbf{F}$ są ściśle powiązane z wymiarem wektora stanu $\mathbf{x}_t$ (patrz równanie (1.3.2)), to stąd wynika że rząd macierzy Hankela jest równy wymiarowi wektora stanu.

ESTYMATOR ZMIENNYCH INSTRUMENTALNYCH

Odpowiednie estymatory zmiennych instrumentalnych systemu macierzy dane są wzorami (1.3.19a–c):

$$\mathbf{O}_J^T R_+^{-1} \mathbf{H}^A R_-^{-1} \mathbf{\Omega}_S = (\mathbf{O}_J^T R_+^{-1} \mathbf{O}_J) \hat{\mathbf{F}} (\mathbf{\Omega}_S R_-^{-1} \mathbf{\Omega}_S^T), \quad (1.3.19a)$$

$$\mathbf{H}_{\bullet,1}^T R_+^{-1} \mathbf{O}_J = \hat{\mathbf{M}}^T \hat{\mathbf{X}}, \quad (1.3.19b)$$

$$\mathbf{H}_{1,\bullet} R_-^{-1} \hat{\mathbf{\Omega}}^T = \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{\Pi}}, \quad (1.3.19c)$$

gdzie:

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = N^{-1} \sum \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T = \hat{\mathbf{\Omega}} R_-^{-1} \mathbf{\Omega}^T,$$

$$\mathbf{O}_J = [\mathbf{H} \quad \mathbf{H}\mathbf{F} \quad \dots \quad \mathbf{H}\mathbf{F}^{J-1}]^T,$$

$$\mathbf{\Omega}_S = [\mathbf{M} \quad \mathbf{F}\mathbf{M} \quad \dots \quad \mathbf{F}^{S-1}\mathbf{M}]^{34}.$$

Opisany powyżej estymator używa wektora stanu $\mathbf{x}_t$ jako zmiennej instrumentalnej.

Macierz $\mathbf{M}$ (1.3.17b) odgrywa podobną rolę do macierzy $\mathbf{G}$ (1.3.4) (por. Aoki(1990)), zaś związek pomiędzy macierzami przedstawia równanie (1.3.18). Macierz $\mathbf{M}$ jako jedyna spełnia to samo równanie Lyapunova co macierz $\mathbf{G}$, tzn.:

$$\mathbf{F}\mathbf{G}_C \mathbf{F}^T - \mathbf{G}_C = -\mathbf{G}\mathbf{G}^T, \quad \mathbf{F}\mathbf{G}_\Omega \mathbf{F}^T - \mathbf{G}_\Omega = -\mathbf{M}\mathbf{M}^T,$$

gdzie $\mathbf{G}_C = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ oraz $\mathbf{G}_\Omega = \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^T$ są odpowiednio Granianem sterowania i $\mathbf{\Omega}$ Granianem. Sterowalność pary $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$ jest tak samo określona jak sterowalność pary

³⁴ Odpowiednik macierzy $\mathbf{C}$, przy czym macierz $\mathbf{G}$ została zastąpiona macierzą $\mathbf{M}$.

$(\mathbf{F}, \mathbf{G})$, wystarczy macierz $\mathbf{G}$ zastąpić macierzą $\mathbf{M}$. Mówimy wówczas o $\mathbf{M}$ -sterowalności modelu. Dodatnia określoność Granianu sterowania gwarantuje sterowalność, zaś dodatnia określoność $\mathbf{\Omega}$ Granianu gwarantuje $\mathbf{M}$ -sterowalność modelu PS. Ponieważ rzędy Granianu sterowania i $\mathbf{\Omega}$ Granianu są sobie równe (por. Aoki(1990)), to $\mathbf{M}$ -sterowalność wyznacza również samą sterowalność.

Pomiędzy macierzą Hankela (1.3.15), a macierzami $\mathbf{O}_J$ i $\mathbf{\Omega}_S$ zachodzi następujący związek:

$$\mathbf{H}_{J,S} = \mathbf{O}_J \mathbf{\Omega}_S. \quad (1.3.20)$$

Macierz Hankela rozkłada się względem wartości szczególnych (1.3.16), zatem:

$$\mathbf{O}_J = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{\Omega}_S = \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T. \quad (1.3.21)$$

Ponieważ macierze $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ są macierzami ortogonalnymi, a macierz $\mathbf{\Sigma}$ jest macierzą diagonalną, to wówczas:

$$\mathbf{O}_J^T \mathbf{O}_J = \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Omega}_S \mathbf{\Omega}_S^T. \quad (1.3.22)$$

Zauważmy, iż dla szeregu jednowymiarowego, macierze opisane równaniami (1.3.14) są skalarami (wariancjami). Stąd, na podstawie równań (1.3.21) oraz (1.3.22), można stwierdzić, że estymatory opisane równaniem (1.3.19a), (1.3.19b)³⁵, (1.3.19c) przyjmują odpowiednio postaci (1.3.17a), (1.3.17b), (1.3.17c). Zatem dla szeregu jednowymiarowego estymator zmiennych instrumentalnych jest taki sam jak estymator realizacji stochastycznych.

Błędy dla estymatora systemu macierzy opisanego równaniami (1.3.19) dane są wzorami³⁶:

$$\delta \mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} - \mathbf{H} = \left(N^{-1} \sum \varepsilon_t \mathbf{x}_t^T \right) \hat{\mathbf{\Pi}}^{-1}, \quad (1.3.23)$$

$$\delta \mathbf{M} = \hat{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{O}_J^T R_+^{-1} \mathbf{B} \left(N^{-1} \sum \varepsilon_{t+1}^+ z_t^T \right), \quad (1.3.24)$$

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{G} \left(N^{-1} \sum \varepsilon_t \mathbf{x}_t^T \right) \mathbf{\Pi}^{-1} + \hat{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{O}_J^T R_+^{-1} \mathbf{B} \left(N^{-1} \sum \varepsilon_{t+1}^+ \mathbf{x}_t^T \right) \mathbf{\Pi}^{-1}, \quad (1.3.25)$$

³⁵ $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{O}_J^T R_+^{-1} \mathbf{O}_J$.

³⁶ Por. Aoki (1990) s.180.

gdzie macierz $\mathbf{B}$ jest trójkątną-dolną macierzą Toepliza.

Reszty modelu PS opisanego równaniami (1.3.4–5) oblicza się w następujący sposób:

$$\hat{\varepsilon}_t = z_t - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{x}_t = \varepsilon_t - \delta\mathbf{H}\mathbf{x}_t. \quad (1.3.26)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= N^{-1} \sum \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^T = N^{-1} \sum z_t z_t^T - \hat{\mathbf{H}} \left(N^{-1} \sum \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T \right) \hat{\mathbf{H}}^T = \\ &= \hat{K}(0) - \hat{\mathbf{H}} \hat{\Pi} \hat{\mathbf{H}}^T. \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Innym aspektem rozważań nad modelem PS jest wymiar wektora stanu, a w konsekwencji wymiar przestrzeni stanów, parametrów modelu PS oraz macierzy Hankela (1.3.15). Jednym ze sposobów wyznaczenia wymiaru wektora stanów jest zastosowanie statystyki Bartletta³⁷:

$$b_n = -\left\{ N - n - \frac{1}{2}(2S + 1) \right\} \ln \prod_{i \geq n+1} (1 - \gamma_i^2) \quad (1.3.28)$$

gdzie:

S – wymiar macierzy Hankela,

n – wymiar wektora stanu ($n \leq S$),

γ_i – współczynniki korelacji kanonicznej.

Statystyka Bartletta ma rozkład χ^2 z $(S - n)^2$ stopniami swobody. Testujemy hipotezę:

$$H_0 : n = n^*, \text{ wobec } H_1 : n < n^*,$$

gdzie n^* jest wymiarem wektora stanu.

Statystyka ta wykorzystuje współczynniki korelacji kanonicznej³⁸. Współczynniki korelacji kanonicznej mierzą zależność między wektorem danych w przód $\mathbf{z}_t^+$ oraz wektorem danych w tył $\mathbf{z}_{t-1}^-$ (por. Jajuga (1993) s.217, Rao (1982) s.579, Wei

³⁷ Por. Aoki (1991) s.159.

³⁸ Ang. canonical correlation coefficient.

(1990) s.99). Współczynniki korelacji kanonicznej otrzymujemy normalizując wektory $\mathbf{z}_t^+$ oraz $\mathbf{z}_{t-1}^-$ w następujący sposób:

$$\mathbf{d}_t^+ = R_+^{-1/2} \mathbf{z}_t^+ \quad \text{ i } \quad \mathbf{d}_{t-1}^- = R_-^{-1/2} \mathbf{z}_{t-1}^- \quad (1.3.29)$$

Zauważmy, iż macierz kowariancji znormalizowanych wektorów (1.3.29) jest przekalowaną wersją macierzy Hankela (1.3.15), tzn.:

$$\hat{E}(\mathbf{d}_t^+ \mathbf{d}_{t-1}^{-T}) = R_+^{-1/2} \mathbf{H} R_-^{-1/2} = \mathbf{P} \mathbf{\Gamma} \mathbf{Z}^T. \quad (1.3.30)$$

Macierz kowariancji (podobnie jak macierz Hankela) można rozłożyć względem wartości szczególnych (por. (1.3.16)) otrzymując $\mathbf{P} \mathbf{\Gamma} \mathbf{Z}^T$. Zatem, macierz $\mathbf{\Gamma}$ jest macierzą diagonalną, zaś jej elementy diagonalne⁴⁰ γ_i noszą nazwę *współczynników korelacji kanonicznej* pomiędzy przeszłymi i przyszłymi wektorami danych.

1.4 Reprezentacja procesów stochastycznych w dziedzinie częstości

Na temat reprezentacji procesów stochastycznych w dziedzinie częstości można znaleźć wiele publikacji zarówno w języku angielskim⁴¹ jak i polskim⁴².

SPEKTRUM I JEGO WŁASNOŚCI

Niech z_t będzie rzeczywistym procesem stacjonarnym z bezwzględnie zbieżnym szeregiem autokowariancji $K(\tau)$. Realizację z_t można przedstawić za pomocą równania:

$$\varphi(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \quad (1.4.1)$$

gdzie $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \dots$ są stałymi mającymi określone wartości, zaś $\omega = \frac{2\pi}{T}$ jest częstością związaną z okresem T . Wówczas transformata Fouriera istnieje i wynosi:

³⁹ Wartości R_+ i R_- opisane są w równaniu (1.3.14).

⁴⁰ Są one uporządkowane w sposób malejący.

⁴¹ Por. Brockwell, Davis (1991) Gouriéroux, Monfort (1997) Hamilton (1994), Harvey (1993), Koopmans (1995), Priestley (1981) i wiele innych.

⁴² Por. Milo (1990), Talaga (1995), Talaga, Zieliński (1986), Zieliński (1979).

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (1.4.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau \quad (1.4.3)$$

$$= \frac{1}{2\pi} K(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad (1.4.4)$$

gdzie $K(\tau) = K(-\tau)$, zaś odwrotna transformata Fouriera ma postać:

$$K(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (1.4.5)$$

Funkcja $f(\omega)$ nosi nazwę spektrum i ma następujące własności:

- ciągła i nieujemna⁴³,
- parzysta i okresowa o okresie 2π ,
- gdy $\tau = 0$, to wówczas z (1.4.5) otrzymujemy:

$$\text{Var}(z_t) = K(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega \quad (1.4.6)$$

Wariancja procesu stacjonarnego równa się polu ograniczonemu krzywą $f(\omega)$ oraz osią ω w przedziale $[-\pi, \pi]$. Różniczka $f(\omega)d\omega$ określa udział częstości zawartych w przedziale $(\omega, \omega + d\omega)$ w ogólnej wariancji procesu, gdzie $d\omega$ jest dowolnie małym przyrostem częstości⁴⁴,

- równania (1.4.2) oraz (1.4.5) pokazują, iż spektrum $f(\omega)$ i ciąg autokowariancji $K(\tau)$ są parą transformat Fouriera. Stąd też podejście dziedziny czasu oraz podejście dziedziny częstości jest teoretycznie równoważne. W zależności od potrzeb preferuje się jedno lub drugie podejście.

⁴³ Dowód, patrz Wei (1990) s.233.

⁴⁴ Por. Stawicki (1993), Talaga, Zieliński (1986), Zieliński (1979).

REPREZENTACJA SPEKTRALNA FUNKCJI AUTOKOWARIANCJI - FUNKCJA SPEKTRALNA

Reprezentacja spektralna funkcji autokowariancji $K(\tau)$ dana wzorami (1.4.2) oraz (1.4.5) istnieje tylko dla bezwzględnie zbieżnego szeregu autokowariancji. Ogólnie, reprezentację spektralną dowolnego ciągu autokowariancji $K(\tau)$ można zapisać w postaci całki Fouriera-Stieltjesa:

$$K(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega). \quad (1.4.7)$$

gdzie $F(\omega)$ jest *funkcją spektralną*. Funkcja spektralna, podobnie jak funkcja (dys-trybuenta) rozkładu prawdopodobieństwa, jest funkcją rzeczywistą, nieujemną, ograniczoną i niemalejącą⁴⁵. Może być ona złożona z trzech składników⁴⁶:

- funkcji kroku (funkcji dyskretnej), składającej się z przeliczalnej ilości skończonych skoków,
- funkcji bezwzględnie ciągłej,
- „pojedynczych” funkcji⁴⁷.

Trzeci składnik jest bez znaczenia. Zatem można go w wielu przypadkach pominąć⁴⁸. Wówczas:

$$F(\omega) \approx F_c(\omega) + F_s(\omega), \quad (1.4.8)$$

gdzie $F_c(\omega)$ jest funkcją bezwzględnie ciągłą, zaś $F_s(\omega)$ jest funkcją skoku. W przypadku opisanym równaniem (1.4.5), tzn. przy bezwzględnie zbieżnym szeregu autokowariancji, $F(\omega) = F_c(\omega)$ oraz $dF(\omega) = f(\omega)d\omega$.

Pomimo, iż funkcja $F(\omega)$ jest nieujemna i niemalejąca, to nie posiada wszystkich własności funkcji rozkładu prawdopodobieństwa (f.r.p.), gdyż $\int_{-\pi}^{\pi} dF(\omega) = K(0)$, która nie koniecznie jest równa 1. Można zdefiniować taką funkcję $G(\omega)$, która będzie posiadała wszystkie własności f.r.p. .

⁴⁵ Por. Talaga, Zieliński (1986) s.20.

⁴⁶ Por. Koopmans (1995) s.32, Priestley (1981) s.226, Wei (1990) s.236.

⁴⁷ Ang. a „singular” function.

Niech:

$$G(\omega) = \frac{F(\omega)}{K(0)}. \quad (1.4.9)$$

Wówczas $G(\omega) \geq 0$ oraz $\int_{-\pi}^{\pi} dG(\omega) = 1$. Jeżeli $dF(\omega) = f(\omega)d\omega$, to:

$$p(\omega)d\omega = dG(\omega) = \frac{f(\omega)}{K(0)}d\omega. \quad (1.4.10)$$

Wykorzystując równania (1.4.2) – (1.4.5) otrzymuje się odpowiednie transformaty Fouriera:

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_{\tau} e^{-i\omega\tau} \quad (1.4.11)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_{\tau} \cos \omega\tau \quad (1.4.12)$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{\infty} \rho_{\tau} \cos \omega\tau, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad (1.4.13)$$

oraz

$$\rho_{\tau} = \int_{-\pi}^{\pi} p(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (1.4.14)$$

gdzie ρ_{τ} jest współczynnikiem korelacji. Funkcja $p(\omega)$ ma własności funkcji gęstości prawdopodobieństwa na przedziale $[-\pi, \pi]$. Nosi ona nazwę *funkcji gęstości spektralnej*.

Zatem pomiędzy funkcją gęstości spektralnej i spektrum zachodzi związek $p(\omega) = \frac{f(\omega)}{K(0)}$. Ponieważ $K(0)$ jest stałą, spektrum często utożsamia się z funkcją gęstości spektralnej i odwrotnie.

⁴⁸ Por. Koopmans (1995) s.32, Priestley (1981) s.227.

Porównując równanie (1.1.9) oraz (1.4.2)⁴⁹ można zauważyć związek pomiędzy spektrum oraz funkcją tworzącą autokowariancję:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} K(e^{-i\omega}). \quad (1.4.15)$$

REPREZENTACJA SPEKTRALNA PROCESÓW STACJONARNYCH

Niech ciąg autokowariancji będzie dany równaniem (1.4.7) oraz niech dany będzie szereg czasowy z_t , który możemy zapisać za pomocą całki Fouriera-Stieltjesa:

$$z_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dU(\omega), \quad (1.4.16)$$

gdzie, dla pojedynczej realizacji, $U(\omega)$ odgrywa podobną rolę do $F(\omega)$ w równaniu (1.4.7). Relacja (1.4.16) nosi nazwę *reprezentacji spektralnej procesu stacjonarnego* z_t . Funkcja $U(\omega)$ może się zmieniać z realizacji na realizację. To znaczy, dla każdej realizacji z_t znajduje się realizację $U(\omega)$. Jeżeli równanie (1.4.16) jest użyte do przedstawienia wszystkich możliwych realizacji procesu z_t , to dla każdego ω , $U(\omega)$ przyjmuje wartości zespolone procesu stochastycznego. A zatem całka w równaniu (1.4.16) jest całką stochastyczną. Równość (1.4.16) jest definiowana w średniokwadratowym sensie, tzn.:

$$E \left[\left| z_t - \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dU(\omega) \right|^2 \right] = 0. \quad (1.4.17)$$

Niech z_t będzie procesem stacjonarnym o średniej zero ($E[z]_t = 0$). Wówczas:

$$\forall_{\omega} E[dU(\omega)] = 0. \quad (1.4.18)$$

Dla procesu stacjonarnego z_t z wartościami zespolonymi o średniej zero, funkcja autokowariancji jest zdefiniowana w sposób⁵⁰:

⁴⁹ Zakładamy, że spektrum istnieje.

⁵⁰ Dzięki takiej definicji wariancja procesu Z_t jest rzeczywista.

$$K(\tau) = E(z_t z_{t+\tau}^*), \quad (1.4.19)$$

gdzie $z_{t+\tau}^*$ oznacza proces sprzężony do procesu $z_{t+\tau}$. Jeżeli proces z_t jest procesem o wartościach rzeczywistych, to wówczas $z_{t+\tau}^* = z_{t+\tau}$. Na podstawie (1.4.16) proces z_t^* można zapisać:

$$z_t^* = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega t} dU^*(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dU^*(-\omega). \quad (1.4.20)$$

Zatem proces z_t jest rzeczywisty wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{\omega} dU^*(-\omega) = dU(\omega). \quad (1.4.21)$$

Podstawiając (1.4.16) i (1.4.20) do (1.4.19), otrzymujemy autokowariancję:

$$\begin{aligned} K(\tau) &= E(z_t z_{t+\tau}^*) \\ &= E \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dU(\omega) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega(t+\tau)} dU^*(\omega) \right] \\ &= E \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} e^{-i\lambda(t+\tau)} dU(\omega) dU^*(\lambda) \right] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega-\lambda)t} e^{-i\lambda\tau} E[dU(\omega) dU^*(\lambda)] \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

która jest niezależna od t , gdyż z_t jest procesem stacjonarnym. Stąd wynika iż:

$$\forall_{\omega \neq \lambda} E[dU(\omega) dU^*(\lambda)] = 0. \quad (1.4.23)$$

Zatem proces $U(\omega)$ jest ortogonalny. Niech $\omega = \lambda$, wówczas z (1.4.22) otrzymujemy:

$$K(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega\tau} E[dU(\omega)]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} E[dU(\omega)]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega), \quad (1.4.24)$$

gdzie

$$dF(\omega) = E[dU(\omega)]^2 = dU(\omega) dU^*(\omega), \text{ dla } -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad (1.4.25)$$

i $F(\omega)$ jest funkcją spektralną procesu z_t . Jeżeli proces z_t jest niedeterministyczny, $F(\omega) = F_c(\omega)$, to:

$$f(\omega)d\omega = dF(\omega) = E\left[dU(\omega)\right]^2 \Bigg] \text{ dla } -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (1.4.26)$$

i wówczas:

$$K(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} f(\omega) d\omega. \quad (1.4.27)$$

Proces stacjonarny może być zatem przedstawiony jako funkcja sinusów i cosinusów z nieskorelowanymi losowymi współczynnikami.

Powyższa reprezentacja zwana jest także reprezentacją Cramera. Jest to związane z twierdzeniem Kołmogorowa-Cramera, na podstawie którego każdy stacjonarny proces stochastyczny można przedstawić w postaci (1.4.16)⁵¹.

PERIODOGRAM

Do estymacji funkcji gęstości spektralnej wykorzystuje się periodogram. Niech danych będzie n obserwacji szeregu czasowego z_t oraz reprezentacja Fouriera tego szeregu:

$$z_t = \sum_{k=0}^{n/2} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad (1.4.28)$$

gdzie $\omega_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$, zaś a_k, b_k są współczynnikami Fouriera wynoszącymi:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n z_t \cos \omega_k t, & \text{dla } k=0 \text{ i } k=\frac{n}{2} \text{ jeśli } n \text{ jest parzyste} \\ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n z_t \cos \omega_k t, & \text{dla } k=1, 2, \dots, \left(\frac{n-1}{2}\right) \end{cases}, \quad (1.4.29)$$

oraz

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n z_t \sin \omega_k t, \text{ dla } k=1, 2, \dots, \left(\frac{n-1}{2}\right). \quad (1.4.30)$$

⁵¹ Por. Stawicki (1993) s.15, Talaga, Zieliński (1986) s.21, Wei (1990) s.241.

DEFINICJA 1.4.1

Periodogramem ciągu $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ przy częstości $\omega_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ nazywamy funkcję:

$$I(\omega_k) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n z_t e^{-it\omega_k} \right|^2. \quad (1.4.31)$$

Jeżeli ponadto $0 \leq \omega_k < \pi$, to wówczas wzór (1.4.31) przyjmuje postać:

$$I(\omega_k) = \frac{1}{\pi} \left| \sum_{t=1}^n z_t e^{-it\omega_k} \right|^2 = \frac{n}{2} (a_k^2 + b_k^2), \quad (1.4.32)$$

gdzie a_k, b_k są współczynnikami Fouriera, zaś $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Periodogram składa się z $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ wielkości opisanych równaniem (1.4.32). Pojedynczą wielkość $I(\omega_k)$ związaną z częstością ω_k nazywamy *intensywnością* przy częstości ω_k .

Istotność poszczególnych ω_k sprawdza się weryfikując hipotezy:

$$H_0 : a_k = b_k = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : a_k \neq 0 \vee b_k \neq 0,$$

za pomocą statystyki:

$$F = \frac{(n-3)(a_k^2 + b_k^2)}{2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\lfloor n/2 \rfloor} (a_j^2 + b_j^2)}, \quad (1.4.33)$$

która ma rozkład $F(2, n-3)$ z 2 i $(n-3)$ stopniami swobody.

W praktyce, w szeregach czasowych, są składniki okresowe o nieznannej częstości.

Dla modelu opisanego wzorem:

$$Z_t = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t + \varepsilon_t, \quad (1.4.34)$$

gdzie ε_t jest białym szumem o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$, zaś ω jest nieznaną częstością, stawiamy test:

$$H_0 : \alpha = \beta = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0. \quad (1.4.35)$$

Niech:

$$I^{(1)}(\omega_{(1)}) = \max \{I(\omega_k)\}. \quad (1.4.36)$$

Wówczas statystyka Fishera ma postać:

$$T = \frac{I^{(1)}(\omega_{(1)})}{\sum_{k=1}^{[n/2]} I(\omega_k)}. \quad (1.4.37)$$

Ze względu na hipotezę zerową dla procesu białego szumu modelu z_t , Fisher pokazał, że:

$$P(T > g) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \binom{N}{j} (1 - jg)^{N-1}, \quad (1.4.38)$$

gdzie $N = [n/2]$, $g > 0$, zaś m jest największą liczbą naturalną mniejszą od $1/g$. Zatem, dla danego poziomu istotności α , do znalezienia wartości krytycznej g_α można użyć równania (1.4.38) jak i równania:

$$P(T > g_\alpha) = \alpha, \quad (1.4.39)$$

Jeżeli wyliczona za pomocą szeregu wartość T jest większa od g_α , to odrzucamy hipotezę zerową.

Do obliczenia wartości krytycznej, używa się również równania (1.4.38) w postaci:

$$P(T > g) \cong N(1 - g)^{N-1}. \quad (1.4.40)$$

Dla małego N wartości krytyczne obliczone za pomocą wzoru (1.4.39) i (1.4.40) są bardzo dobrym przybliżeniem wartości krytycznych obliczonych za pomocą wzorów (1.4.39) oraz (1.4.38).

ESTYMATOR FUNKCJI GĘSTOŚCI SPEKTRALNEJ

Funkcja gęstości spektralnej rzeczywistego procesu stochastycznego z czasem dyskretnym i funkcją spektralną $F(\omega)$ absolutnie ciągłą, wyrażona w zależności od funkcji kowariancyjnej dana jest wzorem (1.4.4). Naturalnym estymator $f(\omega)$

otrzymuje się poprzez zastąpienie funkcji kowariancyjnej $K(\tau)$ jej estymatorem $\hat{K}(\tau)$. Dla danych n obserwacji szeregu czasowego można policzyć $\hat{K}(\tau)$ tylko dla $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Stąd estymator $f(\omega)$ ma postać:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(n-1)}^{(n-1)} \hat{K}(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi} \hat{K}(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{n-1} \hat{K}(\tau) \cos \omega\tau.\end{aligned}\quad (1.4.41)$$

Estymator $\hat{f}(\omega)$ jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym lecz niezgodnym.

Rozważmy $f(\hat{\omega}_k)$ przy $\omega_k = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]$. Przy takich częstościach periodogram oraz gęstość spektralna są w ścisłej relacji. Przekształcając wzór (1.4.32) otrzymujemy:

$$I(\omega_k) = \frac{n}{2} (a_k^2 + b_k^2) = 2 \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \hat{K}(j) e^{-i\omega_k j} = 2 \left(\hat{K}(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \hat{K}(j) \cos \omega_k j \right). \quad (1.4.42)$$

Zatem:

$$\hat{f}(\omega_k) = \frac{1}{4\pi} I(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]. \quad (1.4.43)$$

Jeżeli n jest parzyste, to $\hat{f}(\omega_{n/2}) = \frac{1}{2\pi} I(\omega_{n/2})$.

OKNO SPEKTRALNE

Naturalną drogą do zredukowania wariancji gęstości spektralnej jest lokalne wygładzanie gęstości spektralnej wokół konkretnej częstości. Innymi słowy, estymator gęstości spektralnej jest otrzymywany dla średnich wag m wartości na lewo i prawo od częstości ω_k , tzn.:

$$\hat{f}_\lambda(\omega_k) = \sum_{j=-m_n}^{m_n} \lambda_M(\omega_j) \hat{f}(\omega_k - \omega_j), \quad (1.4.44)$$

gdzie $\omega_k = \frac{2\pi k}{n}$, dla $k = 0, \pm 1, \dots, \pm [\frac{n}{2}]$, są częstościami Fouriera. Funkcja λ_M posiada następujące własności:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-m_n}^{m_n} \lambda_M(\omega_j) &= 1, \\
\lambda_M(-\omega_j) &= \lambda_M(\omega_j), \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-m_n}^{m_n} \lambda_M^2(\omega_j) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.4.45}$$

Funkcja wagowa λ_M zwana jest oknem spektralnym. Wariancja funkcji opisanej wzorem (1.4.44) wynosi:

$$\text{Var}[\hat{f}_\lambda(\omega_k)] \cong [f(\omega_k)]^2 \sum_{j=-m_n}^{m_n} \lambda_M^2(\omega_j). \tag{1.4.46}$$

Z własności (1.4.45) okna spektralnego wynika, iż wariancja gęstości spektralnej maleje, gdy n rośnie. Wartość m_n oznacza ilość częstości (szerokość pasma częstości) użytych w wygładzaniu. Wartość ta ma bezpośredni związek z szerokością okna spektralnego. Gdy szerokość okna rośnie, to otrzymany estymator jest bardziej stabilny (posiada mniejszą wariancję).

FUNKCJA WAGOWA

Niezgodność estymatora $\hat{f}(\omega)$ można wyeliminować wprowadzając do wzoru (1.4.41) funkcję wagową $\lambda_{M,k}$, gdzie dowolna stała M jest liczbą opóźnień. Wówczas:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M \lambda_{M,k} \hat{\gamma}_k e^{-i\omega k}. \tag{1.4.47}$$

Funkcja wagowa posiada następujące własności:

$$\begin{aligned}
|\lambda_{M,k}| &\leq 1, \\
\lambda_{M,0} &= 1, \\
\lambda_{M,-k} &= \lambda_{M,k}, \\
\lambda_{M,k} &= 0, \quad |k| > M.
\end{aligned} \tag{1.4.48}$$

Wariancja estymatora gęstości spektralnej opisanego wzorem (1.4.47) wynosi:

$$\text{Var}[\hat{f}(\omega)] \cong \frac{1}{n} f^2(\omega) \sum_{k=-M}^M \lambda_{M,k}^2. \tag{1.4.49}$$

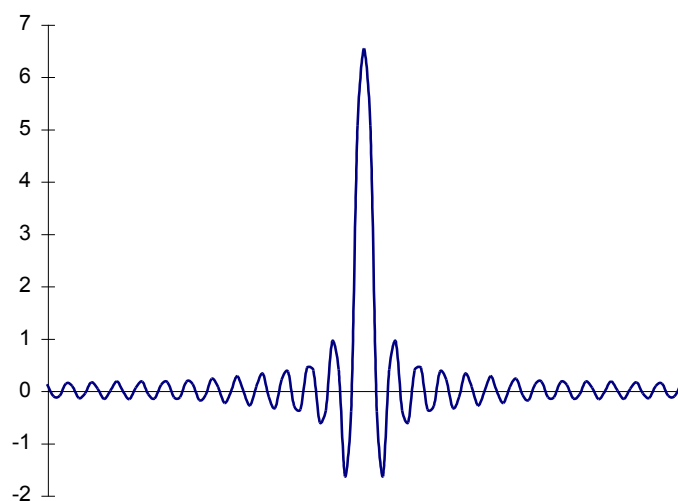
Transformatą Fouriera wag $\lambda_{M,k}$ jest okno spektralne:

$$\lambda_M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M \lambda_{M,k} e^{-i\omega k}. \quad (1.4.50)$$

Im więcej znamy punktów dla których szacuje się gęstość spektralną, tym lepiej przedstawiona jest funkcja $f(\omega)$. Liczba M jest zależna od n (liczby obserwacji). Na ogół liczba M stanowi od 10% do 30% długości szeregu. Szerokość okna spektralnego⁵² jest odwrotnie proporcjonalne do ilości opóźnień (M) użytych do znalezienia okna (policzenia wag). Jeżeli wartość M rośnie, maleje szerokość okna (EBW) i stąd wariancja (V) wygładzonej gęstości spektralnej rośnie, pomimo iż obciążenie (O) maleje.

$$\begin{aligned} M \uparrow &\Rightarrow EBW \downarrow \Rightarrow V \uparrow \Rightarrow O \downarrow \\ M \downarrow &\Rightarrow EBW \uparrow \Rightarrow V \downarrow \Rightarrow O \uparrow \end{aligned}$$

Niektóre okna spektralne przyjmują wartości zarówno dodatnie jak i ujemne. Przykład takiego okna przedstawiono na rys 1.4.1.



Rys 1.4.1. Okno spektralne przyjmujące wartości ujemne i dodatnie

⁵² Ang. bandwidth.

Ekstrema lokalne okna spektralnego noszą nazwę listków bocznych⁵³. Istnienie dużych listków bocznych dopuszcza większy udział w wygładzaniu częstości oddległych od ω . Powoduje to „rozmycie” mocy skupionej w jednym punkcie częstości, na szerszy przedział częstości. Zjawisko takie nosi nazwę przecieku spektrum⁵⁴. Oznacza ono, iż w estymatorze gęstości spektralnej ważną rolę może odgrywać inna częstość różna od ω . Listki boczne przedstawione na rys.1.4.1 przyjmują zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Jest to bardzo niekorzystne, ponieważ gęstość spektralna jest z definicji wielkością dodatnią. Przy wyborze wagi powinno się unikać okien z dużymi listkami bocznymi.

W literaturze można spotkać różne okna spektralne. Poniżej przedstawiono najczęściej stosowane okna:

– Okno prostokątne:

$$\lambda_M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[\omega(M + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}. \quad (1.4.51)$$

M jest opóźnieniem mniejszym od $(n-1)$.

Prostokątne okno spektralne przyjmuje maksymalną wartość $(2M+1)/2\pi$ dla częstości $\omega=0$, zero dla $\omega = \pm 2j\pi/(2M+1)$ oraz listki boczne (maksima lokalne) dla $\omega = \pm(4j+1)\pi/(2M+1)$, gdzie $j=1,2,\dots$. Część listków bocznych przyjmuje wartości ujemne. Okno prostokątne przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Stąd też, estymator gęstości spektralnej, dla pewnych częstości, może przyjmować wartości ujemne. Ponieważ gęstość spektralna z definicji jest funkcją nieujemną, otrzymany estymator nie jest zadowalający.

– Okno Bartletta:

$$\lambda_M(\omega) = \frac{1}{2\pi M} \left[\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2. \quad (1.4.52)$$

⁵³ Ang. side lobes.

⁵⁴ Ang. leakage.

Okno spektralne Bartletta przyjmuje wartości nieujemne. Zatem estymator funkcji gęstości spektralnej także jest nieujemny. Listki boczne w oknie Bartletta są mniejsze niż listki boczne w oknie prostokątnym.

– Okno Blackmana-Tukey’a:

$$\lambda_M(\omega) = \frac{a}{2\pi} \frac{\sin[(\omega - \pi/M)(M + 1/2)]}{\sin[(\omega - \pi/M)/2]} + \frac{(1-2a)}{2\pi} \frac{\sin[\omega(M + 1/2)]}{\sin(\omega/2)} + \frac{a}{2\pi} \frac{\sin[(\omega + \pi/M)(M + 1/2)]}{\sin[(\omega + \pi/M)/2]}, \quad (1.4.53)$$

gdzie stała a może przyjmować wartości $0 < a \leq 0,25$.

Dla pewnych częstości ω , estymator Blackmana-Tukey’a gęstości spektralnej może przyjmować wartości ujemne.

– Okno Parzena:

$$\lambda_M(\omega) \cong \frac{3}{8\pi M^3} \left[\frac{\sin(\omega M/4)}{1/2 \sin(\omega/2)} \right]^4. \quad (1.4.54)$$

M przyjmuje wartości parzyste. Okno Parzena przyjmuje wartości dodatnie dla dowolnych częstości. Stąd też estymator gęstości spektralnej przyjmuje wartości nieujemne.

Zestawienie wag poszczególnych okien jest przedstawione w tabeli 1.4.1.

Dla danego M , najszerszym z prezentowanych okien jest okno Parzena. Zatem ma najmniejszą wariancję, a stąd największe obciążenie. Ponadto przyjmuje wartości nieujemne, co wpływa na nieujemność estymatora gęstości spektralnej. Drugim takim oknem jest okno Bartletta.

W oprogramowaniu najczęściej używane są okna Parzena i Blackmana-Tukey’a.

Jakość estymatora gęstości spektralnej jest wyznaczona poprzez kształt (formę funkcji wagowej) i szerokość okna (lub równoważnie, ilości opóźnień). Kształt okna spektralnego zmienia się dla różnych szerokości okna. A zatem, w konstrukcji okna spektralnego, nie można zwracać uwagi tylko na kształt okna, ale również na jego szerokość. Szersze okno z mniejszą wariancją. Z drugiej strony, mniejszy wymiar

okna daje mniejsze obciążenie i mniejszy przeciek. Potrzebny kompromis pomiędzy wysoką stabilnością i wysokimi rezultatami jest często trudny.

Kroki przy wyborze okna:

1. określić dopuszczalny i pożądaný kształt krzywej,
2. wstępnie policzyć gęstość spektralną dla szerokiego okna,
3. przeliczać gęstość spektralną dla stopniowo węższych okien aż do ustabilizowania.

Ustabilizowana wartość estymatora gęstości spektralnej jest poszukiwanym wynikiem.

Tabela 1.4.1.1. Funkcje wagowe stosowane do estymacji funkcji gęstości spektralnej

Okno	Funkcja wagowa	Stopnie swobody*	EBW**
Prostokątne	$\lambda_{M,k} = \begin{cases} 1 & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$\frac{n}{M}$	$\frac{\pi}{M}$
Bartletta lub trójkątne	$\lambda_{M,k} = \begin{cases} 1 - \frac{ k }{M}, & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$\frac{3n}{M}$	$\frac{3\pi}{M}$
Blackman-Tukey	$\lambda_{M,k} = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos(\pi \frac{k}{M}), & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$\frac{n}{M(1-4a+6a^2)}$	$\frac{\pi}{M(1-4a+6a^2)}$
Tukey-Hamming (a=0,23)	$\lambda_{M,k} = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos(\pi \frac{k}{M}), & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$\frac{2,516n}{M}$	$\frac{2,516\pi}{M}$
Tukey-Hanning (a=0,25)	$\lambda_{M,k} = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi \frac{k}{M})], & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$\frac{8n}{3M}$	$\frac{8\pi}{3M}$
Parzena	$\lambda_{M,k} = \begin{cases} 1 - 6 \frac{k}{M} ^2 + 6 \frac{k}{M} ^3, & k \leq \frac{1}{2} M \\ 2(1 - \frac{k}{M})^3, & \frac{1}{2} M < k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$\frac{3,709n}{M}$	$\frac{3,709\pi}{M}$

* Ang. Equivalent degrees of freedom

** Ang. Equivalent bandwidth

ROZDZIAŁ II

Zależności pomiędzy reprezentacjami procesów stochastycznych

2.1 Reprezentacja ARMA a reprezentacja w dziedzinie częstości

Proces stacjonarny z_t mający minimalną reprezentację ARMA($\underline{p}, \underline{q}$) postaci:

$$\phi(B)z_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (2.1.1)$$

można zapisać jako proces realizacji stochastycznych:

$$z_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}. \quad (2.1.2)$$

Funkcja tworząca autokowariancję (1.1.10) modelu opisanego za pomocą równania (2.1.1) ma postać:

$$K(B) = \sigma_{\varepsilon}^2 \frac{\theta(B)\theta(B^{-1})}{\phi(B)\phi(B^{-1})}, \quad (2.1.3)$$

zaś funkcja gęstości spektralnej wyrażona jest wzorem:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} K(e^{-i\omega}) = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2 \theta(e^{-i\omega})\theta(e^{i\omega})}{2\pi \phi(e^{-i\omega})\phi(e^{i\omega})} \quad (2.1.4)$$

$$= \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2\pi} \left| \frac{\theta(e^{-i\omega})}{\phi(e^{-i\omega})} \right|^2. \quad (2.1.5)$$

Ponieważ proces stacjonarny z_t ma minimalną reprezentację ARMA, to istnieje funkcja odwrotna do (2.1.5) dana wzorem:

$$f^{-1}(\omega) = \frac{2\pi\phi(e^{-i\omega})\bar{\phi}(e^{i\omega})}{\sigma_\varepsilon^2\theta(e^{-i\omega})\bar{\theta}(e^{i\omega})} \quad (2.1.6)$$

$$= \frac{2\pi}{\sigma_\varepsilon^2} \left| \frac{\phi(e^{-i\omega})}{\theta(e^{-i\omega})} \right|^2. \quad (2.1.7)$$

Funkcja (2.1.7) jest spektrum widmowym procesu ARMA. Stosując odwrotną transformatę Fouriera do $f^{-1}(\omega)$ otrzymujemy:

$$K^{(I)}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (2.1.8)$$

która jest znana jako funkcja odwrotna autokowariancji. Oczywiście:

$$\rho_\tau^{(I)} = \frac{K^{(I)}(\tau)}{K^{(I)}(0)} = \frac{1}{K^{(I)}(0)} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (2.1.9)$$

jest funkcją odwrotną autokorelacji.

2.2 Model ARMA a model przestrzeni stanów

Minimalną reprezentację $\text{ARMA}(\underline{p}, \underline{q})$, opisaną wzorami (1.2.1)-(1.2.2), można zapisać jako model przestrzeni stanów w postaci kanonicznej⁵⁵ (2.2.1) lub w postaci opisanej równaniami (2.2.2a) i (2.2.2b)⁵⁶.

Niech $\underline{m} = \max(\underline{p}, \underline{q})$ oraz $\phi_j = 0$ dla $j > \underline{p}$. Wówczas model PS ma postać:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{\underline{m}} & \phi_{\underline{m}-1} & \phi_{\underline{m}-2} & \phi_{\underline{m}-3} & \dots & \phi_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_{\underline{m}} \end{bmatrix} \cdot \varepsilon_t \quad (2.2.1a)$$

$$z_t = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t \quad t = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.2.1b)$$

gdzie $\mathbf{x}_t^T = [z_{t+1,t}, z_{t+2,t}, \dots, z_{t+\underline{m},t}]$, zaś $z_{t+1,t} = E[z_{t+1} | z_k, k \leq t]$,

⁵⁵ Patrz Gouriéroux, Monfort (1997) s.287, Brockwell, Davis (1991) s.469.

⁵⁶ Patrz Gouriéroux, Monfort (1997) s.288.

lub

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} -\phi_1 & -\phi_2 & \dots & -\phi_p & \theta_1 & \dots & \theta_{q-1} & \theta_q \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_t, \quad (2.2.2a)$$

$$z_t = [-\phi_1 \quad \dots \quad -\phi_p \quad \theta_1 \quad \dots \quad \theta_q] \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \quad (2.2.2b)$$

gdzie $\mathbf{x}_t^T = [z_{t-1} \quad \dots \quad z_{t-p} \quad \varepsilon_{t-1} \quad \dots \quad \varepsilon_{t-q}]$.

Postać kanoniczną PS modelu ARMA można otrzymać wykorzystując warunkową wartość oczekiwaną modelu ARMA:

$$z_{t+\underline{m}} = \phi_1 z_{t+\underline{m}-1} + \dots + \phi_{\underline{m}} z_t + \varepsilon_{t+\underline{m}} - \theta_1 \varepsilon_{t+\underline{m}-1} - \dots - \theta_{\underline{m}} \varepsilon_t, \quad (2.2.3)$$

gdzie $\phi_j = 0$ dla $j > p$ oraz $\theta_i = 0$ dla $i > q$, $i, j = 1, \dots, \underline{m}$, zaś:

$$z_{t+i} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+i-j}. \quad (2.2.4)$$

$$\text{Niech} \quad z_{t+i,t-1} = E[z_{t+i} | z_k, k \leq t-1] = \sum_{j=i+1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+i-j}. \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Zatem} \quad z_{t+i,t} &= E[z_{t+i} | z_k, k \leq t] = \sum_{j=i}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+i-j} = \\ &= \psi_i \varepsilon_t + \sum_{j=i+1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+i-j} = z_{t+i,t-1} + \psi_i \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} z_{t+1,t} &= z_{t+1,t-1} + \psi_1 \varepsilon_t \\ z_{t+2,t} &= z_{t+2,t-1} + \psi_2 \varepsilon_t \\ &\dots \\ z_{t+\underline{m}-1,t} &= z_{t+\underline{m}-1,t-1} + \psi_{\underline{m}-1} \varepsilon_t \\ z_{t+\underline{m},t} &= z_{t+\underline{m},t-1} + \psi_{\underline{m}} \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Licząc wartość oczekiwaną warunkową dla procesu postaci (2.2.3) otrzymujemy:

$$z_{t+\underline{m},t-1} = \phi_1 z_{t+\underline{m}-1,t-1} + \dots + \phi_{\underline{m}} z_{t,t-1}. \quad (2.2.8)$$

Zatem ostatnie równanie (2.2.7), ze względu na (2.2.8), ma postać:

$$z_{t+\underline{m},t} = \phi_1 z_{t+\underline{m}-1,t-1} + \dots + \phi_{\underline{m}} z_{t,t-1} + \psi_{\underline{m}} \varepsilon_t. \quad (2.2.9)$$

Dla $i \geq 0$ $z_{t+\underline{m}+i,t}$ jest funkcją $z_{t,t-1}, z_{t+1,t-1}, \dots, z_{t+\underline{m}-1,t-1}$.

$$z_{t+\underline{m}+1,t} = \phi_1 z_{t+\underline{m},t-1} + \dots + \phi_{\underline{m}} z_{t+1,t-1} = f(z_{t,t-1}, z_{t+1,t-1}, \dots, z_{t+\underline{m}-1,t-1}). \quad (2.2.10)$$

Stąd wektorem stanu jest wektor $\mathbf{x}_{t-1} = [z_{t,t-1}, z_{t+1,t-1}, \dots, z_{t+\underline{m}-1,t-1}]^T$, a reprezentacja przestrzeni stanów modelu ARMA dana jest wzorem (2.2.1).

Założmy, że proces z_t posiada reprezentację przestrzeni stanów, zaś minimalny model PS jest postaci (1.3.4)–(1.3.5). Wymiar wektora stanu $\mathbf{x}_t$ wynosi $\underline{m}$. Wielomian charakterystyczny macierzy $\mathbf{F}$ jest dany wzorem:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F}| = \sum_{i=0}^{\underline{m}} \phi_i \lambda^{m-i}, \quad (2.2.11)$$

gdzie $\phi_0 = 1$. Na podstawie twierdzenia Cayleya-Hamiltona wiemy, że:

$$\sum_{i=0}^{\underline{m}} \phi_i \mathbf{F}^{m-i} = 0. \quad (2.2.12)$$

Stosując kolejne podstawienia do równania (1.3.4), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+i} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_{t+i-1} + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+i-1} = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_{t+i-2} + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+i-2}) + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+i-1} = \\ &= \mathbf{F}^2 \mathbf{x}_{t+i-2} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+i-2} + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+i-1} = \\ &\dots\dots \\ &= \mathbf{F}^i \mathbf{x}_t + \mathbf{F}^{i-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \varepsilon_t + \dots + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+i-1} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Mnożąc równanie (1.3.5) przez odpowiednie ϕ_i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} z_{t+\underline{m}} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_{t+\underline{m}} + \varepsilon_{t+\underline{m}} = \mathbf{H}(\mathbf{F}^{\underline{m}} \mathbf{x}_t + \mathbf{F}^{\underline{m}-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \varepsilon_t + \dots + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+\underline{m}-1}) + \varepsilon_{t+\underline{m}} \\ \phi_1 z_{t+\underline{m}-1} &= \phi_1 (\mathbf{H}_1 \mathbf{x}_{t+\underline{m}-1} + \varepsilon_{t+\underline{m}-1}) = \phi_1 \mathbf{H}(\mathbf{F}^{\underline{m}-1} \mathbf{x}_t + \mathbf{F}^{\underline{m}-2} \cdot \mathbf{G} \cdot \varepsilon_t + \dots + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+\underline{m}-2}) + \phi_1 \varepsilon_{t+\underline{m}-1} \\ &\dots\dots\dots \\ \phi_{\underline{m}-1} z_{t+1} &= \phi_{\underline{m}-1} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_{t+1} + \varepsilon_{t+1}) = \phi_{\underline{m}-1} \mathbf{H}(\mathbf{F} \mathbf{x}_t + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_t) + \phi_{\underline{m}-1} \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

$$\phi_{\underline{m}} z_t = \phi_{\underline{m}} \mathbf{H} \mathbf{x}_t + \phi_{\underline{m}} \varepsilon_t \quad (2.2.14)$$

Dodając do siebie prawe i lewe strony (2.2.14) mamy:

$$\begin{aligned} z_{t+\underline{m}} + \phi_1 z_{t+\underline{m}-1} + \dots + \phi_{\underline{m}-1} z_{t+1} + \phi_{\underline{m}} z_t &= \mathbf{H}(\mathbf{F}^{\underline{m}} \mathbf{x}_t + \mathbf{F}^{\underline{m}-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \varepsilon_t + \dots + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+\underline{m}-1}) + \varepsilon_{t+\underline{m}} + \\ &+ \phi_1 \mathbf{H}(\mathbf{F}^{\underline{m}-1} \mathbf{x}_t + \mathbf{F}^{\underline{m}-2} \cdot \mathbf{G} \cdot \varepsilon_t + \dots + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t+\underline{m}-2}) + \phi_1 \varepsilon_{t+\underline{m}-1} + \dots \\ &\dots + \phi_{\underline{m}-1} \mathbf{H}(\mathbf{F} \mathbf{x}_t + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_t) + \phi_{\underline{m}-1} \varepsilon_{t+1} + \phi_{\underline{m}} \mathbf{H} \mathbf{x}_t + \phi_{\underline{m}} \varepsilon_t = \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{F}^{\underline{m}} + \phi_1 \mathbf{F}^{\underline{m}-1} + \dots + \phi_{\underline{m}-1} \mathbf{F} + \phi_{\underline{m}} \mathbf{I}) \mathbf{x}_t + \\ &+ (\mathbf{H} \mathbf{F}^{\underline{m}-1} \mathbf{G} + \phi_1 \mathbf{H} \mathbf{F}^{\underline{m}-2} \mathbf{G} + \dots + \phi_{\underline{m}-1} \mathbf{H} \mathbf{G} + \phi_{\underline{m}}) \varepsilon_t + \dots \\ &+ (\mathbf{H} \mathbf{G} + \phi_1) \varepsilon_{t+\underline{m}-1} + \varepsilon_{t+\underline{m}} \end{aligned}$$

Niech:

$$\theta_i = \mathbf{H} \mathbf{F}^{i-1} \mathbf{G} + \phi_1 \mathbf{H} \mathbf{F}^{i-2} \mathbf{G} + \dots + \phi_{i-1} \mathbf{H} \mathbf{G} + \phi_i, \quad i = 1, \dots, p. \quad (2.2.15)$$

Wówczas (ze względu na (2.2.12)) proces z_t ma reprezentację ARMA postaci:

$$z_{t+\underline{m}} + \phi_1 z_{t+\underline{m}-1} + \dots + \phi_{\underline{m}} z_t = \varepsilon_{t+\underline{m}} + \theta_1 \varepsilon_{t+\underline{m}-1} + \dots + \theta_{\underline{m}} \varepsilon_t, \quad (2.2.16a)$$

lub w równoważnej formie:

$$z_t + \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_{\underline{m}} z_{t-\underline{m}} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_{\underline{m}} \varepsilon_{t-\underline{m}}. \quad (2.2.16b)$$

W literaturze można spotkać transformację modelu ARMA w model PS bez założenia o minimalnej reprezentancji ARMA⁵⁷. Podstawowa różnica pomiędzy przedstawioną powyżej metodą a metodą zamieszczoną we wskazanej literaturze polega na innym wyborze wymiaru wektora stanu. Mianowicie za wymiar wektora stanu przyjmuje się $\max(p, q+1)$, gdzie p i q są odpowiednio rzędem autoregresji oraz rzędem średniej ruchomej modelu ARMA. Jeżeli $\underline{m} = \max(\underline{p}, \underline{q}) = \max(p, q+1)$, to w obydwu przypadkach otrzymuje się identyczną macierz stanu oraz macierz wyjścia, zaś macierz zakłóceń różni się, tzn.:

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & \psi_1 & \dots & \psi_{\underline{m}-1} \end{bmatrix}.$$

⁵⁷ Por. np.: Górka (1997), Grzesiak (1995), Harvey (1993), Wei (1990).

W pracy Gourieroux, Monfort (1997) można znaleźć powiązania pomiędzy reprezentacją ARMA i reprezentacją PS. Poniżej zostaną przytoczone dwa twierdzenia⁵⁸ opisujące zależności pomiędzy obydwoma reprezentacjami.

TWIERDZENIE 2.2.1

Proces realizacji stochastycznych:

$$z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad (2.2.17)$$

ma reprezentację ARMA wtedy i tylko wtedy, gdy ma reprezentację PS.

Równoważność form można wyrazić za pomocą funkcji transferowej. Funkcja transferowa modelu ARMA (1.2.1) w postaci realizacji stochastycznych (2.2.17) ma postać:

$$\phi^{-1}(x)\theta(x), \quad (2.2.18)$$

zaś funkcję transferową modelu PS można zapisać:

$$1 + \mathbf{H}(\mathbf{I}x - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G}. \quad (2.2.19)$$

Zatem funkcję transferową (2.2.18) można zapisać jako (2.2.19) i odwrotnie.

Niech dany będzie proces jednowymiarowy mający minimalną reprezentację $\text{ARMA}(\underline{p}, \underline{q})$ oraz minimalny model PS o wymiarze $\underline{K}$.

TWIERDZENIE 2.2.2

$$\underline{K} = \max(\underline{p}, \underline{q}).$$

Zatem model PS (2.2.2) minimalnej reprezentacji ARMA nie jest minimalnym modelem PS, zaś model PS opisany równaniami (2.2.1) jest minimalnym modelem PS.

⁵⁸ Twierdzenia oraz dowody można znaleźć w pracy Gourieroux, Monfort (1997) s.284 i następne.

2.3 Model przestrzeni stanów a spektrum

Pomiędzy funkcją gęstości spektralnej a funkcją autokowariancji⁵⁹ zachodzi związek:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (2.3.1)$$

Funkcję autokowariancji modelu PS (1.3.4–5) można wyrazić wzorem:

$$K(\tau) = \mathbf{H}\mathbf{F}^{\tau-1} E(\mathbf{x}_{t+1} z_t^T) = \mathbf{H}\mathbf{F}^{\tau-1} \mathbf{M}, \text{ dla } \tau \geq 1, \quad (2.3.2)$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = E(\mathbf{x}_{t+1} z_t^T) = \mathbf{F} \mathbf{\Pi} \mathbf{H}^T + \mathbf{G} \Delta,$$

$$\text{cov}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{\Pi}, \quad \text{cov}(\varepsilon_t) = \Delta.$$

Macierz $\mathbf{\Pi}$ oraz Δ są stałe w czasie, gdyż proces z_t jest stacjonarny. Spełnione są również dwa następujące równania:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F} \mathbf{\Pi} \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \Delta \mathbf{G}^T, \quad (2.3.4)$$

$$K(0) = \mathbf{H} \mathbf{\Pi} \mathbf{H}^T + \Delta. \quad (2.3.5)$$

Zatem:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(K(0) + \sum_{\tau=1}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} + \sum_{\tau=1}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(K(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau \right) = \\ &= \frac{K(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{\infty} \mathbf{H}\mathbf{F}^{\tau-1} \mathbf{M} \cos \omega\tau. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Odwrotną transformatą Fouriera do (2.3.1) jest:

⁵⁹ Funkcja spektralna jest różniczkowalna, zaś szereg autokowariancji jest bezwzględnie zbieżny.

$$K(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.3.7)$$

Zatem mając funkcję gęstości spektralnej można wyznaczyć wartości funkcji autokowariancji, natomiast mając funkcję autokowariancji można wyznaczyć macierz Hankela (1.3.15), i dalej model PS.

LEMAT

Model PS otrzymany za pomocą funkcji gęstości spektralnej jest modelem stabilnym.

Dowód:

Dana jest funkcja gęstości spektralnej. Zatem szereg autokowariancji jest bezwzględnie zbieżny. Stąd, jeżeli:

$$\sum |K(\tau)| < \infty \Rightarrow \sum K(\tau) < \infty. \quad (2.3.8)$$

Funkcję autokowariancji można opisać wzorem (2.3.2), zatem:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=1}^{\infty} K(\tau) &= \sum_{\tau=1}^{\infty} \mathbf{H} \mathbf{F}^{\tau-1} \mathbf{M} = \mathbf{H} \mathbf{M} + \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{M} + \mathbf{H} \mathbf{F}^2 \mathbf{M} + \dots = \\ &= \mathbf{H} (\mathbf{I} + \mathbf{F} + \mathbf{F}^2 + \dots) \mathbf{M} = \mathbf{H} \left(\sum_{\tau=1}^{\infty} \mathbf{F}^{\tau-1} \right) \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Macierze $\mathbf{H}$ i $\mathbf{M}$ są stałe, zatem zbieżność szeregu (2.3.9) zależy tylko od zbieżności szeregu:

$$\sum_{\tau=1}^{\infty} \mathbf{F}^{\tau-1} = \mathbf{I} + \mathbf{F} + \mathbf{F}^2 + \dots \quad (2.3.10)$$

Ponieważ szereg (2.3.9) jest zbieżnym, to istnieje suma szeregu (2.3.10). Natomiast suma szeregu (2.3.10) istnieje, jeżeli⁶⁰ $\|\mathbf{F}\| < 1$, tzn.⁶¹:

$$\|\mathbf{F}\| < 1 \Rightarrow \sum_{\tau=1}^{\infty} \mathbf{F}^{\tau-1} = \mathbf{I} + \mathbf{F} + \mathbf{F}^2 + \dots = (\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}, \quad (2.3.11)$$

⁶⁰ Por. Kielbański, Schwetlick (1992) s.152.

⁶¹ Szereg (2.3.11) nosi nazwę szeregu Neumanna macierzy $\mathbf{F}$.

gdzie $\|\mathbf{F}\|$ jest dowolną normą multiplikatywną macierzy.

Z drugiej strony każda wartość własna λ macierzy $\mathbf{F}$ spełnia nierówność (por. Kiełbasiński, Schwetlick (1992) s.44):

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{F}\|. \quad (2.3.12)$$

Podstawiając poprzednik implikacji (2.3.11) do (2.3.12), otrzymujemy:

$$|\lambda| < 1. \quad (2.3.13)$$

Ponieważ wartości własne macierzy $\mathbf{F}$ leżą wewnątrz koła jednostkowego (2.3.13), to model PS jest stabilny. cnd.

Odwrotnie, stabilność model PS nie gwarantuje bezwzględnej zbieżności szeregu autokowariancji⁶².

WNIOSEK

Za pomocą każdej z reprezentacji można otrzymać funkcję autokowariancji, natomiast za pomocą funkcji autokowariancji można wyznaczyć każdą z reprezentacji.

2.4 Przykłady transformacji modeli

PRZYKŁAD 1

Niech dany będzie stacjonarny szereg czasowy z_t , który ma reprezentację autoregresyjną rzędu drugiego AR(2) postaci:

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} = \varepsilon_t. \quad (2.4.1)$$

Założmy, że pierwiastki wielomianu $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ leżą na zewnątrz koła jednostkowego.

Nie znając wartości szeregu czasowego a jedynie jego reprezentację AR opisaną równaniem (2.4.1) można wyznaczyć reprezentację w dziedzinie częstości. Funkcja tworząca autokowariancję procesu ma postać:

⁶² Gwarantuje zbieżność szeregu.

$$K(B) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - \phi_1 B^{-1} - \phi_2 B^{-2})}, \quad (2.4.2)$$

zaś funkcja gęstości spektralnej wyrażona jest wzorem:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} K(e^{-i\omega}) = \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + 2\phi_1(\phi_2 - 1)\cos \omega - 2\phi_2 \cos 2\omega}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Model PS w postaci kanonicznej, dla procesu AR(2) dany jest wzorami:

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_1^2 + \phi_2 \end{bmatrix} \varepsilon_{t-1}, \quad (2.4.4a)$$

$$z_t = [0 \quad 1] \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \quad (2.4.4b)$$

gdzie $\mathbf{x}_{t-1} = [x_{t,t-1} \quad x_{t+1,t-1}]^T$, $x_{t,t-1} = z_{t-2}$, $x_{t+1,t-1} = z_{t-1}$.

PRZYKŁAD 2

Dany jest model ARMA(2,1) stacjonarnego szeregu czasowego z_t :

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \quad (2.4.5)$$

Proces opisany równaniem (2.4.5) jest przyczynowy i odwracalny.

Funkcja gęstości spektralnej modelu (2.4.5) wyrażona jest wzorem:

$$f(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \cdot \frac{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \cos \omega}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + 2\phi_1(\phi_2 - 1)\cos \omega - 2\phi_2 \cos 2\omega}, \quad (2.4.7)$$

zaś model PS w postaci kanonicznej dany jest wzorami:

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} \phi_1 - \theta_1 \\ \phi_1^2 - \phi_1 \theta_1 + \phi_2 \end{bmatrix} \varepsilon_{t-1}, \quad (2.4.8a)$$

$$z_t = [0 \quad 1] \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \quad (2.4.8b)$$

gdzie $\mathbf{x}_{t-1} = [x_{t,t-1} \quad x_{t+1,t-1}]^T$, $x_{t,t-1} = z_{t-2}$, $x_{t+1,t-1} = z_{t-1}$.

PRZYKŁAD 3

Model PS stacjonarnego szeregu czasowego z_t ma postać:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{G} \cdot \varepsilon_{t-1}, \quad (2.4.9a)$$

$$z_t = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \quad (2.4.9b)$$

gdzie wektor stanu $\mathbf{x}_t$ jest wektorem dwuwymiarowym, zaś macierze $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ są odpowiednio wymiarów 2×2 , 2×1 , 1×2 . Model opisany równaniami (2.4.9) jest modelem stabilnym, obserwowalnym oraz sterowalnym. Zatem zgodnie z twierdzeniem 1.3.1 jest modelem minimalnym.

Niech:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = [h_{11} \quad h_{12}]. \quad (2.4.10)$$

Wówczas model ARMA, dla modelu PS opisanego równaniami (2.4.9) wyraża się wzorem:

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \quad (2.4.11)$$

gdzie:

$$\phi_1 = f_{11} + f_{22},$$

$$\phi_2 = f_{12} f_{21} - f_{22} f_{11},$$

$$\theta_1 = -(h_{11} g_{11} + h_{12} g_{21}) + \phi_1,$$

$$\theta_2 = -h_{11}(f_{11} g_{11} + f_{12} g_{21}) - h_{12}(f_{21} g_{11} + f_{22} g_{21}) + \phi_1(\phi_1 - \theta_1) + \phi_2.$$

Funkcja gęstości spektralnej dla danego modelu PS ma postać:

$$f(\omega) = \frac{K(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{\infty} \mathbf{H} \mathbf{F}^{\tau-1} \mathbf{M} \cos \omega \tau, \quad (2.4.12)$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = E(\mathbf{x}_{t+1} z_t^T) = \mathbf{F} \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \mathbf{G} \Delta,$$

$$K(0) = \mathbf{H} \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \Delta,$$

$$\text{cov}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{\Pi}, \text{cov}(\varepsilon_t) = \Delta.$$

PRZYKŁAD 4

Dana jest funkcja gęstości spektralnej $f(\omega)$ pewnego stacjonarnego procesu z_t . Wówczas za pomocą odwrotnej transformaty Fouriera (2.1.8) otrzymujemy funkcję autokowariancji $K(\tau)$.

Mając funkcję autokowariancji można wyznaczyć macierz Hankela (1.3.15) a następnie model PS.

Za pomocą funkcji autokowariancji można również wyznaczyć wartości parametrów modelu ARMA. W tym celu można skorzystać z metody największej wiarygodności z wykorzystaniem algorytmu Newtona-Raphsona oraz algorytmu Marquardta opisanych w poprzednim rozdziale.

Reasumując, dla danego modelu ARMA można zapisać odpowiedni model PS oraz funkcję gęstości spektralnej korzystając tylko ze znanych wartości parametrów autoregresyjnych i średniej ruchomej. Mając dany model ARMA bez dodatkowych informacji można wyznaczyć minimalny wymiar przestrzeni stanów.

Dla danego modelu PS, korzystając z wartości elementów poszczególnych macierzy, można wyznaczyć model ARMA (np. (2.4.11)). Postać modelu PS informuje nas jedynie o możliwym maksymalnym rzędzie autoregresji lub średniej ruchomej, nie konkretyzując z jakim modelem ARMA mamy do czynienia. Taka samą postać będzie miał model ARMA(2,2) jak i model ARMA(2,1) czy ARMA(1,2), ARMA(2,0), ARMA(0,2). Otrzymanie funkcji gęstości spektralnej wymaga dodatkowych obliczeń.

Przy danej funkcji gęstości spektralnej dodatkowych obliczeń wymaga otrzymanie funkcji autokowariancji szeregu, a następnie należy użyć estymatorów omówionych w poprzednim rozdziale do uzyskania oceny parametrów modelu ARMA lub modelu PS.

Na podstawie przeprowadzonej analizy można sformułować bardzo ważny wniosek:

WNIOSEK

Postać modelu PS informuje o maksymalnym rzędzie autoregresji lub średniej ruchomej modelu ARMA. Jeżeli model PS jest modelem minimalnym, to rząd autoregresji lub rząd średniej ruchomej jest równy wymiarowi wektora stanu.

2.5 Funkcja największej wiarygodności dla modelu przestrzeni stanów

Niech $\boldsymbol{\psi}$ oznacza wektor nieznanych hiperparametrów. Wówczas logarytm funkcji największej wiarygodności modelu PS jednowymiarowego procesu ma postać⁶³:

$$\log L(\boldsymbol{\psi}, \sigma_*^2) = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log \sigma_*^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log f_t - \frac{1}{2\sigma_*^2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t}, \quad (2.5.1)$$

gdzie:

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = \sigma_*^2 h_t, \quad h_t \text{ jest skalar,}$$

$$E[\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T] = \sigma_*^2 \mathbf{P}_0, \quad \text{macierz } \mathbf{P}_0 \text{ jest warunkiem początkowym filtru Kalmana,}$$

$$E(v_t, v_t) = \sigma_*^2 f_t, \quad v_t \text{ jest błędem predykcji,}$$

T – liczba obserwacji.

Parametr σ_*^2 jest współczynnikiem skali, zwykle odpowiadającym wariancji zakłócenia modelu. Różniczkując (2.5.1) względem σ_*^2 i przyrównując do zera otrzymujemy:

$$\tilde{\sigma}_*^2(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t}. \quad (2.5.2)$$

Wyrażenie (2.5.2) jest MNW estymatorem σ_*^2 pod warunkiem danych wartości $\boldsymbol{\psi}$. Podstawiając (2.5.2) do (2.5.1) otrzymuje się logarytm funkcji największej wiarygodności postaci:

$$\log L(\boldsymbol{\psi}, \sigma_*^2) = -\frac{T}{2} \log(2\pi + 1) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log f_t - \frac{T}{2} \log \tilde{\sigma}_*^2(\boldsymbol{\psi}). \quad (2.5.3)$$

⁶³ Por. Harvey A. C., (1993) s.91.

Należy tak dobrać parametry, aby zmaksymalizować wartość funkcji (2.5.3). Alternatywnie funkcję sumy kwadratów reszt:

$$S(\boldsymbol{\psi}) = \left(\prod_{t=1}^T f_t \right) \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t} \quad (2.5.4)$$

należy zminimalizować.

Jeżeli wektor $\boldsymbol{\psi}$ zawierać będzie wszystkie elementy macierzy stanu, zakłóceń i wyjścia, to wówczas będzie szacowany model PS. Natomiast jeżeli niektóre wartości wyżej wymienionych macierzy będą z góry ustalone (tak jak ma to miejsce we wzorze (2.2.1)), to wówczas będą szacowane parametry modelu ARMA za pomocą postaci modelu PS. Należy zauważyć, że konieczna liczba hiperparametrów dla oszacowania parametrów modelu ARMA jest znacznie mniejsza niż dla oszacowania pełnego modelu PS.

ROZDZIAŁ III

Analiza numeryczna ekonomicznych szeregów czasowych

3.1 Analiza własności generowanych szeregów

Analizę empiryczną zastosowano do modeli AR(2) i ARMA(2,1). Wybór modeli podyktowany był zastosowaniem w analizie szeregów czasowych reprezentacji przestrzeni stanów. Analiza procesu stochastycznego o rzędzie opóźnień jeden, w reprezentacji PS nie jest interesująca. Ponieważ w literaturze najczęściej spotyka się ekonomiczne szeregi czasowe o rzędzie opóźnień dwa¹, zatem badania przeprowadzone zostały dla wyżej wymienionych typów modeli.

Do obliczeń wykorzystano programy: Microsoft Excel 97, Statistica 5.1 M, ITSM 4.0 oraz programy napisane przez autorkę w języku programowania Statistica Basic, dostępnego w pakiecie Statistica.

MODELE AR(2)

Wygenerowano modele AR(2):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)z_t = \varepsilon_t,$$

ze zmieniającymi się, w obszarze przyczynowości, współczynnikami autoregresyjnymi, tzn.:

$$\phi_1 \in (-1,9; 1,9), \quad \phi_2 \in [-0,9; 0,8], \quad \varepsilon_t \sim N(0; 1).$$

¹ Por. np.: Box, Jenkins (1983), Brockwell, Davis (1996), Hamilton (1994), Priestley (1981), Wei (1990).

Parametry zmieniały się skokowo o 0,1. Dla każdej pary parametrów ϕ_1, ϕ_2 z obszaru przyczynowości wygenerowano 500 szeregów, których oszacowane, za pomocą MNK, współczynniki autoregresji były w obszarze 10% wartości zadanych parametrów, tzn. $|\phi_i - \hat{\phi}_i| < 0,1 \cdot \phi_i$, $i = 1, 2$. Tak wygenerowane szeregi wykorzystano do dalszej analizy. Korzystając z estymatora opisanego wzorami (1.3.17) dokonano estymacji parametrów modelu przestrzeni stanów. Korzystając z modelu PS, wyznaczono wartości współczynników autoregresyjnych. Zbadano zbieżność tych współczynników wyznaczonych dwiema różnymi metodami. Wyniki dotyczące parametru ϕ_1 , przy założeniu, że różnice między oszacowaniami dokonanyymi za pomocą porównywanych metod nie przekraczają odpowiednio 10, 20, 30 procent zadanej wartości parametru przedstawione zostały w tabeli 3.1.1 oraz w tabelach 1 i 3 zamieszczonych w dodatku. Analogiczne wyniki w odniesieniu do parametru ϕ_2 zamieszczono w tabeli 3.1.2 oraz w dodatku: tabela 2 i 4.

Pomimo teoretycznej równoważności reprezentacji ARMA oraz reprezentacji przestrzeni stanów, oceny parametrów autoregresyjnych, otrzymanych za pomocą modelu AR jak i modelu PS, różnią się. Zbieżność parametrów autoregresyjnych otrzymanych różnymi metodami zależy od wartości poszczególnych parametrów zadanych podczas generowania. W przypadku parametru ϕ_2 zbieżność zależy głównie od wartości tego parametru. Im mniejsza wartość parametru tym mniejsza zbieżność. Dla parametru ϕ_1 zbieżność zależy nie tylko od samej wartości tego parametru, ale również od wartości parametru ϕ_2 . Im mniejsze wartości parametrów ϕ_1 jak i ϕ_2 tym mniejsza zbieżność.

Wyznaczono również wartości funkcji gęstości spektralnej w oparciu o modele AR i model PS. Przykładowe wyniki są przedstawione na rysunku 3.1.1.

Funkcja gęstości spektralnej otrzymana z wykorzystaniem modelu AR jak i modelu PS, dla różnych szeregów, zachowuje ten sam charakter.

Tabela 3.1.1 Udziały ϕ_1 (rozpiętość 20% zadanej wartości parametru)

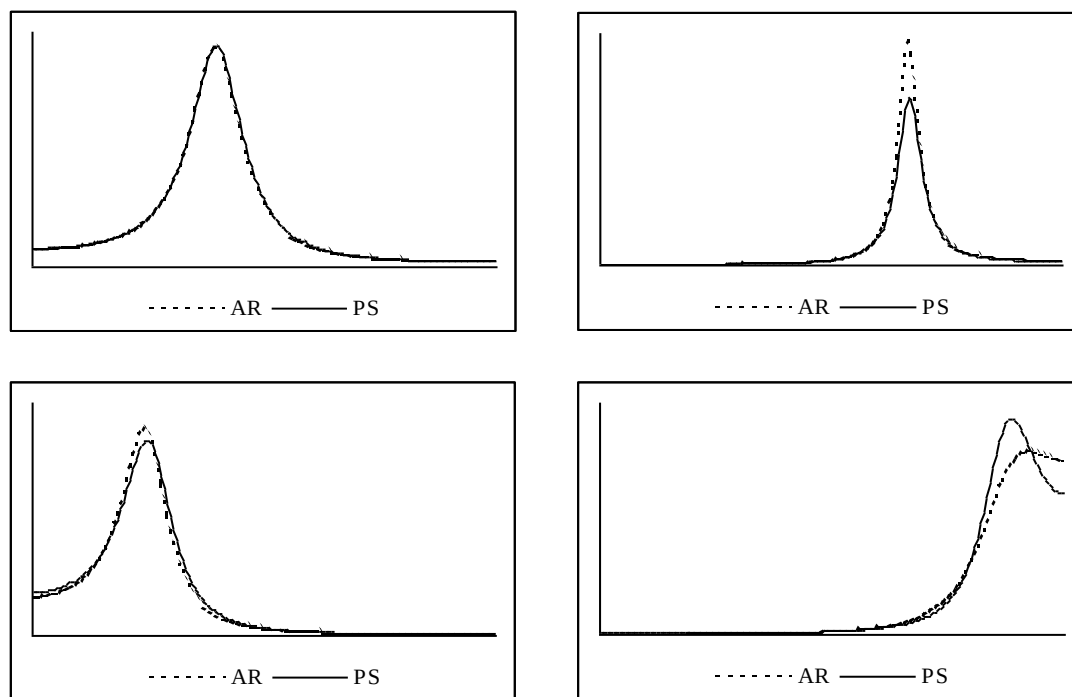
$\phi \backslash \phi_2$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	100	100															
-1,6	100	100	99,8														
-1,5	100	100	99,2	97,6													
-1,4	100	100	99,8	97,4	86,4												
-1,3	100	100	100	96	86,4	54,6											
-1,2	100	100	99,4	96,6	82,2	57,6	32,4										
-1,1	100	100	98,2	96,8	79,2	58,8	27,8	16,2									
-1	100	100	98,4	95,8	81,2	60,2	32,2	17,8	11								
-0,9	100	100	98,4	93,2	78	55,6	33,2	14	11,4								
-0,8	100	99,2	98,2	89,2	77,6	56	31,4	13,2	8,8	12,6							
-0,7	100	99,6	97,6	91,4	73	50,2	28,6	16,4	9,6	9,8	12						
-0,6	100	100	91,4	74	68,8	56	29,8	12	7	9	11,2	18,4					
-0,5	100	99,2	91	75,6	63,8	41,4	27	11,6	5,6	7,4	8,6	18,2	23,8				
-0,4	100	96	90,2	75,2	55,2	44,4	24,8	13	6,8	5,8	9	17	23,8	35			
-0,3	98,2	91,8	80,2	66,6	44,8	34,8	20	10	3,4	4,6	7,6	16	25	34,6	41,2		
-0,2	90,2	83,4	61,8	49,6	32	24,8	18	6,8	3,2	3	8	16,4	21,6	29	35,2	50,4	
-0,1	74,6	61,2	34,4	26,6	17,8	12,8	10,4	5	1,6	2	4	7,6	11,2	13,2	24,8	30,4	48,8
0,1	83,6	52	35,2	26	17,4	13,8	8,8	5,6	0,8	1,6	2,8	7,8	10,2	17,8	25,4	33,2	45,6
0,2	97,4	83,8	62,4	47,4	35	24,8	17,4	10,2	3,6	3,2	7,6	11,8	19,4	27,8	37,8	48,8	
0,3	94,4	92,4	80,6	58,6	44,6	31,4	22,6	7,4	2,6	4	9	15,4	21,4	36,8	42,8		
0,4	99,2	97,2	85,6	69,4	55	39,6	23,6	10,8	4,2	5,6	9,2	17,8	22,6	35,6			
0,5	100	98,4	87,8	84	59,4	47,6	25,2	14	6,2	11,4	11,4	18	31,4				
0,6	100	98,6	93,2	87,2	63	45,6	24,8	12,8	7,6	8	10	16,2					
0,7	100	97	93,2	74,6	69,8	56,6	33,4	16	9,2	9,2	8,8						
0,8	100	99,8	98,8	90,6	77,6	53,6	33	14,2	11,2	10							
0,9	100	100	98,6	94,6	79	58,4	31,8	16	11,6								
1	100	99,6	99,2	94	77,4	58,2	31	15,4	11,2								
1,1	100	99,6	99,4	95,2	83,2	55,4	31	13,4									
1,2	100	100	98,6	97,2	84,6	57,6	28,4										
1,3	100	100	100	97,4	89,2	57,6											
1,4	100	100	99,4	92,8	85,2												
1,5	100	100	100	97,8													
1,6	100	100	99,8														
1,7	100	100															
1,8	100																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 3.1.2. Udziały ϕ_2 (rozpiętość 20% zadanej wartości parametru)

$\phi \backslash \phi_2$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	100	98,6															
-1,6	100	100	86,4														
-1,5	100	98,4	85,6	73,4													
-1,4	100	100	98	81,2	44,4												
-1,5	100	100	99	87,4	57,2	21											
-1,2	100	100	99,4	94,4	59	29,4	13										
-1,1	100	100	99,6	97,2	73,2	37,2	11,2	4,8									
-1	100	100	100	98	86,4	49,4	16,4	2,6	1								
-0,9	100	100	99,6	99,6	82,2	57,6	19,2	4,2	2,2								
-0,8	100	99,8	99,4	93,8	94,6	75	29,2	6,2	1	1,4							
-0,7	100	100	100	97,8	91	80,6	43,2	10	2,2	1,8	4,2						
-0,6	100	100	99	92,4	87,8	73,8	48,6	15,8	3,6	1,80	3,2	9					
-0,5	100	99,8	98	96	86,6	65	45,6	26,8	2,8	2	4,2	13,2	23,4				
-0,4	100	100	95,8	89,8	78,8	57	36,8	21,8	5,6	1,8	4,4	15,4	28,4	43			
-0,3	100	100	99	99,8	74,6	54,2	30,6	14	6,8	2,2	8	17,6	33,6	55,4	70		
-0,2	100	100	99	90,4	75	47,6	29,6	11,6	3,2	2,2	10,4	25	43,6	61,8	84,2	87,4	
-0,1	100	99,2	98	88,4	66,6	47,8	26,4	11,2	2,8	2,4	12,4	24,2	45,8	68,8	88,2	90,2	100
0,1	100	100	95	91,6	72,6	50	24,4	10,6	3,2	2	11,8	28	47,2	65,2	89,4	97,6	100
0,2	100	100	92,2	92	75,8	50,4	24,2	12,8	3	3	9,2	20,4	39,4	60,4	71,2	97	
0,3	100	100	98,6	93	65,8	53,4	30,6	17,4	9	3	6,8	20,4	33,6	53,2	70		
0,4	100	99,8	99,8	80	78,2	57,8	36,2	19,8	5,8	2,4	6,2	16	24,2	45			
0,5	100	99,6	98,8	97,4	84	59,2	47,2	30	2,6	2	5	12,6	27,4				
0,6	100	99,8	99,2	95,2	84,8	66,6	49,8	15,2	2,8	2,6	4	8,4					
0,7	100	100	99	94,4	92,4	78,2	41,2	9,4	2	1,6	3						
0,8	100	99,8	99,8	98	85,6	61,8	29,2	7,6	1,4	1,2							
0,9	100	100	93,4	97,4	89,6	58,4	19,6	5,6	2,4								
1	100	100	98,4	96,2	78	44,4	12,4	3,4	1,6								
1,1	100	100	99,8	95,6	71,8	38,8	13	2,8									
1,2	100	100	95,2	85,2	63	28,4	8,8										
1,3	100	99,8	98,8	85,8	57,4	22,2											
1,4	100	98,6	98,4	71,4	44,8												
1,5	100	100	91,8	76													
1,6	100	98,6	96														
1,7	100	96															
1,8	100																

Źródło: Obliczenia własne



Źródło: Obliczenia własne

Rys. 3.1.1 Teoretyczne funkcje gęstości spektralnej modelu AR i PS

W kolejnym kroku dokonano projekcji w przód korzystając z modelu PS. Zauważono, że dla niektórych współczynników ϕ_1, ϕ_2 druga ($T + 2$) wartość prognozy jest ekstremum lokalnym. Przyjęto następujące określenie.

OKREŚLENIE

1. *Maksimum lokalne* odpowiada temu, że wartość projekcji w okresie $T + 2$ jest większa niż wartość obserwacji w chwili T ,
2. *Minimum lokalne* implikuje, że wartość projekcji na dwa okresy w przód będzie mniejsza od obecnej wartości.

Przy tak przyjętym określeniu w wielu przypadkach, za pomocą modelu PS poprawnie wyznaczono kierunek zmiany wartości szeregu na dwa okresy w przód. Dla szeregów generowanych, w 116 kombinacjach zadanych parametrów (na 305), udział poprawnych prognoz zmiany kierunku wartości szeregu wahał się od 68,6% do 93,6%. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 3.1.3 oraz tabeli 5 w dodatku. Licz-

by oznaczają procentowy udział poprawnego kierunku w min/max szeregów, zaś obszary pokazują procentowy udział min/max szeregów w ogólnej liczbie szeregów.

Tabela 3.1.3. Procentowy udział poprawnego kierunku w min/max szeregów

$\phi \backslash \phi_2$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	37,6																
-1,7	100	37,4															
-1,6	63,6	36	42,4												udział > 90%		
-1,5	71,4	63,9	39,7	43											udział < 10%		
-1,4	74,8	72,7	73	39,3	43												
-1,3	74,8	68,6	68,3	42,4	32	37,4											
-1,2	74,2	74	73,4	72,3	34,3	34,5	42,2										
-1,1	76,4	78,4	73,8	72,2	74,2	41,3	32,9	35,7									
-1	82	81	76,4	75	73,4	42,7	32,1	32,9	39,9								
-0,9	83,8	84,6	79	75	73,8	65	25,2	30,2	34,7								
-0,8	83,8	79,6	80	74,4	81,4	73,1	51,6	29,4	32,6	40,7							
-0,7	83,4	84	84	82,4	78	75,2	72,5	33,6	33,8	35,8	46,3						
-0,6	89,2	83,4	80,8	85	81,6	78,6	77,9	60,7	26,9	32,7	35	42,2					
-0,5	86,2	87,8	84,8	84,6	79	77,8	77,8	70,6	28,9	28,3	37,5	35,7	44,2				
-0,4	90	88,6	84,4	84,4	82,6	78	78,8	75	47,6	26,5	32,6	32,8	34,6	41			
-0,3	91,6	87	85,2	85,6	80,6	80,8	81,4	77,5	64,8	29,3	30,3	32,3	38,4	35,2	38,8		
-0,2	91,2	91	87	84,4	79,4	83,2	77,3	73,5	70,4	30,5	28,9	29,2	32,4	32,2	33,4	41,2	
-0,1	94	88,6	86,6	83,8	82,2	80,4	74,3	73	58,2	37	30,4	31,3	28,8	31	35,2	35,6	43,8
0,1	92,6	92,6	87	84,2	82,2	80,6	78	68,5	55,7	50	47,3	35,8	34,3	32	35,4	39,2	37,8
0,2	93,6	90,4	88,6	86	85,6	80,4	78	68,2	52,1	58,5	39,5	29,8	31,7	37,2	39,5	41,9	
0,3	91	88,6	88,2	86,6	81,2	79	74,9	72,3	58,1	65,8	40	50	33,3	38	40,5		
0,4	90,4	86,6	88,4	84	83,6	81,3	79,6	70,7	64,1	80	50	0	25	53,3			
0,5	89	87,8	83,4	81,2	80,2	74,7	76,2	71,5	68,9	33,3	0	0	0				
0,6	88	85,4	82,6	82,4	82,2	73	71,5	73	60,7	100	0	0					
0,7	85,9	79,7	81,8	78,4	77,2	77,6	70,6	76,9	66,7	0	0						
0,8	89,2	83,8	80,2	79,9	74,7	75,4	71,6	100	0	0							
0,9	66,7	80,1	74,9	78,2	72,7	69,9	0	0	0								
1	100	85,3	78,2	74,4	70,6	25	0	0	0								
1,1	0	78,9	68,9	63,2	0	0	0	0									
1,2	0	50	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 3.1.4. Częstości i poprawny kierunek zmiany wartości szeregu

$\phi_1 \backslash \phi_2$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8																	
-1,7								istotne częstości średnie + poprawny kierunek									
-1,6								poprawny kierunek							niskie		
-1,5	71,4														wysokie		
-1,4	74,8	72,7													mieszane (N, W)		
-1,3	74,8	68,6													średnie		
-1,2	74,2	74	73,4												istotne 2 częstości		
-1,1	76,4	78,4	73,8	72,2													
-1	82	81	76,4	75													
-0,9	83,8	84,6	79	75	73,8												
-0,8	83,8	79,6	80	74,4	81,4	73,1											
-0,7	83,4	84	84	82,4	78	75,2											
-0,6	89,2	83,4	80,8	85	81,6	78,6	78										
-0,5	86,2	87,8	84,8	84,6	79	77,8	78										
-0,4	90	88,6	84,4	84,4	82,6	78	79										
-0,3	91,6	87	85,2	85,6	80,6	80,8	81										
-0,2	91,2	91	87	84,4	79,4	83,2	77										
-0,1	94	88,6	86,6	83,8	82,2	80,4											
0,1	92,6	92,6	87	84,2	82,2	80,6											
0,2	93,6	90,4	88,6	86	85,6	80,4											
0,3	91	88,6	88,2	86,6	81,2	79											
0,4	90,4	86,6	88,4	84	83,6	81,3											
0,5	89	87,8	83,4	81,2	80,2	74,7	76										
0,6	88	85,4	82,6	82,4	82,2	73											
0,7		79,7	81,8	78,4	77,2												
0,8			80,2	79,9													
0,9																	
1																	
1,1																	
1,2																	
1,3																	
1,4																	
1,5																	
1,6																	
1,7																	
1,8																	

Źródło: Obliczenia własne

Możliwość prognozowania kierunku zmiany wartości procesu na dwa okresy w przód jak i wyznaczania prognozy na jeden okres zależy od charakteru procesu. Do zbadania charakteru procesu posłużono się funkcją gęstości spektralnej (dalej

f.g.s.) dla modelu AR. Zbadano jakie częstości otrzymuje się dla danych parametrów modelu AR. Zbiór częstości podzielono na trzy części w sposób następujący:

- częstości niskie $\omega_k \in [0; \frac{1}{3}\pi)$,
- częstości średnie $\omega_k \in [\frac{1}{3}\pi; \frac{23}{30}\pi]$,
- częstości wysokie $\omega_k \in (\frac{23}{30}\pi; \pi]$.

(3.1.1)

Jednocześnie zbadano istotność częstości maksymalnych wartości funkcji gęstości spektralnej, przy 10% poziomie istotności statystyki F . Obszar odpowiadający parametrom AR, dla których częstości związane z maksymalną wartością nie były istotne są otoczone grubszą linią. Zauważono, że dla pewnych wartości parametrów f.g.s. ma dwa maksima lokalne. Jedno z nich znajduje się w przedziale częstości niskich (N), zaś drugie w przedziale częstości wysokich (W). Pomimo występowania dwóch maksimów lokalnych, najczęściej tylko jedna z dwu częstości była istotna. W sześciu przypadkach istotne były obydwie częstości odpowiadające maksimom lokalnym. Wszystkie wyniki przedstawiono w tabeli 3.1.4.

Obszar istotnych częstości średnich oraz obszar poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu, przy 98% udziale min/max szeregów w ogólnej liczbie szeregów prawie się pokrywa. Liczby oznaczają procentowy udział poprawnego kierunku w min/max szeregów. Obszar istotnych wartości średnich (3.1.1) zawiera 95.5% obszaru poprawnego kierunku. Wynik ten pokazuje, że na podstawie analizy funkcji gęstości spektralnej jesteśmy w stanie ocenić przydatność modelu PS do przewidywania kierunku zmiany wartości szeregu na dwa okresy.

MODELE ARMA(2,1)

Wygenerowano modele ARMA(2,1):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)z_t = (1 - \theta B)\varepsilon_t,$$

ze zmieniającymi się, w obszarze przyczynowości, współczynnikami autoregresyjnymi oraz ze zmieniającym się, w obszarze odwracalności współczynnikiem średniej ruchomej, tzn.:

$$\phi_1 \in (-1,9; 1,9), \quad \phi_2 \in [-0,9; 0,8], \quad \theta \in [-0,9; 0,9], \quad \varepsilon_t \sim N(0; 1).$$

Tabela 3.1.5. Obszar występowania min/max szeregu dla dowolnego θ

$\phi_1 \backslash \phi_2$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8																	
-1,7																	
-1,6																	
-1,5																	
-1,4																	
-1,3																	
-1,2																	
-1,1																	
-1																	
-0,9																	
-0,8																	
-0,7																	
-0,6																	
-0,5																	
-0,4																	
-0,3																	
-0,2																	
-0,1																	
0,1																	
0,2																	
0,3																	
0,4																	
0,5																	
0,6																	
0,7																	
0,8																	
0,9																	
1																	
1,1																	
1,2																	
1,3																	
1,4																	
1,5								udziały min/max > 90% dla pewnego θ									
1,6								udziały min/max > 90% dla każdego θ									
1,7																	
1,8																	

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 3.1.6. Obszar występowania istotnych częstości średnich dla dowolnego θ

$\phi_1 \backslash \phi_2$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8																	
-1,7																	
-1,6																	
-1,5																	
-1,4																	
-1,3																	
-1,2																	
-1,1																	
-1																	
-0,9																	
-0,8																	
-0,7																	
-0,6																	
-0,5																	
-0,4																	
-0,3																	
-0,2																	
-0,1																	
0,1																	
0,2																	
0,3																	
0,4																	
0,5																	
0,6																	
0,7																	
0,8																	
0,9																	
1																	
1,1																	
1,2																	
1,3																	
1,4																	
1,5																	
1,6																	
1,7																	
1,8																	

Źródło: Obliczenia własne

Parametry podobnie jak dla modelu AR(2) zmieniały się skokowo o 0,1. Dla każdej odpowiedniej trójki ϕ_1, ϕ_2, θ wygenerowano po 250 szeregów. Następnie oszacowa-

no wartości współczynników ARMA jak i dokonano estymacji parametrów PS. Dokonano projekcji w przód korzystając z modelu PS. Sprawdzono czy dla tego typu modeli wartość druga ($T + 2$) prognozy jest dla niektórych wartości parametrów ekstremum lokalnym. Wyniki zamieszczono w dodatku, tabele 6-23. Otrzymane wyniki wskazują iż występowanie ekstremum lokalnego zależy od wartości wszystkich parametrów. W większości przypadków częste występowanie ekstremum lokalnego ma miejsce w dwu obszarach, podobnie jak to było dla modelu AR(2). Próbuąc uogólnić otrzymane wyniki uzyskano obszar (patrz tabela 3.1.5), w którym niezależnie od wartości poszczególnych parametrów min/max szeregów występuje w 92,4-100% przypadków. Należy przy tym podkreślić, że występowanie niższego od 100% udziału min/max szeregu w ogólnej liczbie szeregów jest marginalne. Obszar zaznaczony jaśniejszym kolorem, a więc obszar występowania dużej ilości min/max szeregu dla niektórych θ , wskazuje na różnice obszarów zawierających ekstremum lokalne szeregu w zależności od konkretnej wartości θ .

Korzystając z funkcji gęstości spektralnej zbadano charakter poszczególnych procesów. Zbiór częstości podzielono tak jak w (3.1.1), zaś dla zbadania istotności częstości maksymalnych wartości f.g.s. ustalono 10% poziom istotności statystyki F . W tabelach 24-41 dodatku obszar istotnych częstości średnich dla danego θ zaznaczono grubą linią. Zestawienie istotnych częstości średnich dla dowolnego θ przedstawiono w tabeli 3.1.6. Wynik pokazuje, że w przypadku częstości także występuje zależność pomiędzy istotnymi częstościami średnimi a wartością parametru θ , choć zależność ta jest o wiele słabsza niż w przypadku występowania ekstremum lokalnego szeregu.

Podobnie jak to było dla modeli AR(2) także i w tym przypadku można zauważyć iż obszar prawie 100% występowania min/max szeregu w znacznej mierze pokrywa się z obszarem występowania częstości średnich. W tabeli 3.1.6 grubą linią zaznaczono obszar, w którym bez względu na wartość parametru θ , ekstrema lokalne szeregu mają prawie 100% udział. Wynik nie jest tak dobry jak dla modelu AR(2). Wynika to z zestawiania 18 różnych wyników. Dla poszczególnych wartości parametru θ wynik jest o wiele lepszy. W tabelach 24-41 dodatku dla każdej wartości θ zaznaczono istotne wartości średnie oraz odpowiedni obszar dużego udziału min/max szeregu. Dla wartości parametrów $\theta \in \{0.9, 0.8, \dots, 0.5\}$ w obszarze odpo-

wiadającym częstościom średnim z przedziału $[\frac{1}{3}\pi; \frac{61}{150}\pi)$ prawie nie występują ekstrema lokalne szeregu. Zatem dla tych wartości parametru θ należałoby zwiększyć wartość granicy dolnej częstości średnich, tzn.

$$- \text{częstości średnie II } \omega_k \in [\frac{61}{150}\pi; \frac{23}{30}\pi]. \quad (3.1.2)$$

Dla tak zdefiniowanych częstości średnich oraz wartości parametrów $\theta = 0.9, 0.8, \dots, 0.5$ obszary istotnych częstości średnich i dużego udziału min/max szeregu prawie się pokrywają. W przypadku gdy parametr θ przyjmuje jedną z wartości $\{0.4, 0.3, 0.2, 0.1, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4\}$ obydwie obszary częstości i min/max pokrywają się w zadawalającym stopniu. Dla wartości $\theta \in \{-0.5, \dots, -0.9\}$ można zwiększyć wartość granicy górnej częstości średnich (3.1.1). Zwiększy to obszar pokrywania się wartości średnich i ekstremów lokalnych szeregu, ale nie wyeliminuje obszaru, dla którego częstości średnie są istotne, zaś udział min/max szeregu w ogólnej liczbie szeregów jest niezadawalający.

Zbadano możliwość prognozowania kierunku zmiany wartości szeregu na dwa okresy w przód dla modelu ARMA(2,1). Przyjęto, podobnie jak dla modelu AR(2), założenia 3.1.1. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabelach 24-41 dodatku. Liczby w wyżej wymienionych tabelach oznaczają procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max szeregu. W obszarze prawie 100% występowania ekstremów lokalnych związanych z częstościami średnimi udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu jest zadawalający. W dalszych rozważaniach pod uwagę wzięto tylko ten obszar występowania ekstremów lokalnych, który jest związany z częstościami średnimi. Wyniki dla poszczególnych wartości parametru średniej ruchomej modelu ARMA(2,1) przedstawiono w tabeli 3.1.7.

W obszarze, w którym udział min/max szeregu w ogólnej liczbie szeregów jest duży procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu na dwa okresy waha się w granicach 66,0%-94,4%. Natomiast dla wspólnego obszaru częstości średnich kierunek zmiany wartości szeregu prognozuje się poprawnie w 50,0%-100%. Wartości skrajne, dla θ dodatniego, wynikają z faktu iż w części obszaru częstości średnich udział ekstremów lokalnych w ogólnej liczbie szeregów jest mały. Jest tak szczególnie dla $\theta > 0,4$. Można wówczas zastosować częstości średnie II.

Tabela 3.1.7. Procentowy udział poprawnego kierunku w min/max szeregu

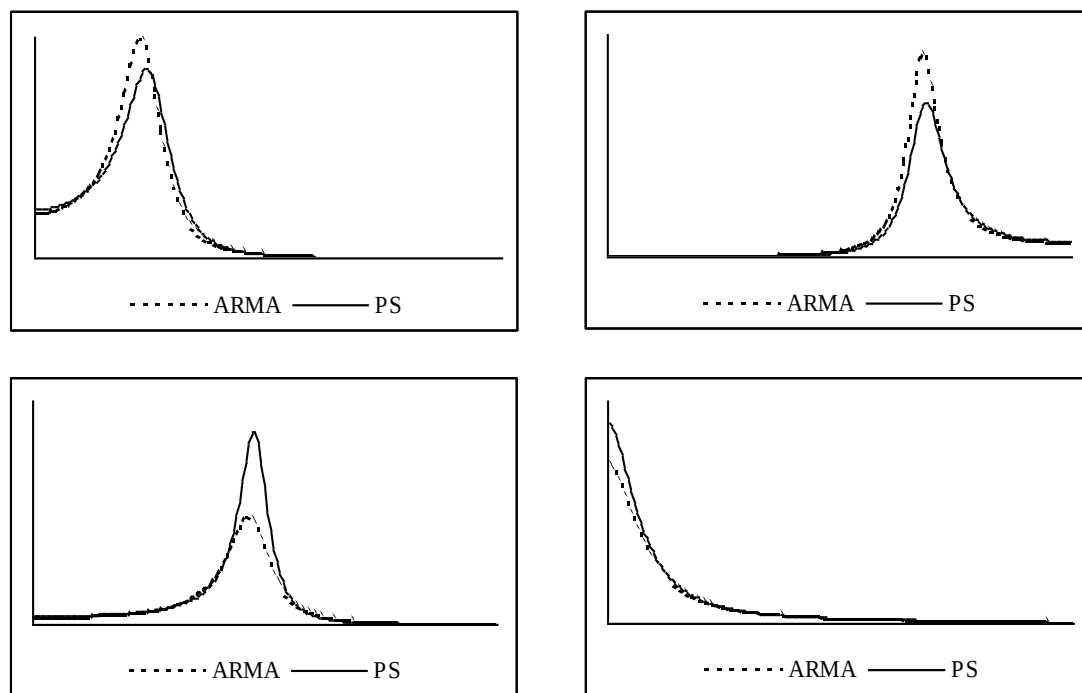
θ	obszar dużego udziału ekstremów lokalnych (min/max)		obszar częstości średnich		wspólny obszar wspólnych częstości i wspólnych min/max
	pojedynczego	wspólnego	pojedynczego	wspólnego	
-0,9	69,6-94,4	69,6-94,4	63,9-94,4	63,9-94,4	74,4-94,4
-0,8	69,2-92,4	69,2-92,4	68,2-92,4	68,2-92,4	72,8-92,4
-0,7	67,2-92,8	71,2-92,8	72,0-92,8	72,0-92,8	72,0-92,8
-0,6	69,8-93,2	73,2-93,2	73,2-93,2	73,2-93,2	73,2-93,2
-0,5	70,4-94,4	70,4-94,4	70,4-94,4	70,4-94,4	70,4-94,4
-0,4	69,6-93,6	69,6-93,6	69,6-93,6	69,6-93,6	69,6-93,6
-0,3	69,6-93,6	69,6-93,6	69,6-93,6	69,6-93,6	69,6-93,6
-0,2	68,8-93,2	68,8-93,2	69,6-93,2	69,6-93,2	69,6-93,2
-0,1	68,4-92,8	68,4-92,8	68,8-92,9	68,8-92,9	68,8-92,8
0,1	68,4-93,6	68,4-93,6	68,4-100	68,4-100	68,4-93,6
0,2	68,0-93,2	68,0-93,2	69,2-100	69,2-100	69,2-93,2
0,3	66,0-92,8	66,0-92,8	50,0-92,8	50,0-92,8	68,8-92,4
0,4	66,8-94,0	66,8-94,0	67,6-100	67,6-100	67,6-94,0
0,5	67,2-94,0	67,2-94,0	67,4-94,0*	58,3-100	67,4-94,0
0,6	67,2-94,0	67,2-94,0	68,4-94,0*	50,0-100	68,4-94,0
0,7	66,8-93,6	66,8-93,6	68,6-93,6*	68,6-100	68,6-93,6
0,8	67,2-92,4	67,2-92,4	68,9-92,4*	68,9-100	68,9-92,4
0,9	67,2-92,0	67,2-92,0	68,5-92,0*	68,5-100	68,5-92,0

* zastosowano częstości średnie II (3.1.2)

Źródło: Obliczenia własne

Dla pozostałych dodatnich wartości θ zastosowanie częstości średnich II wiąże się z zbyt dużym okrojeniem obszaru w którym występują ekstrema lokalne w zadawalającej ilości. Uogólniając, dla $\theta > 0$ lub $\theta \leq -0,6$ należy pod uwagę wziąć część wspólną obszaru istotnych częstości średnich oraz obszaru występowania ekstremów lokalnych, zaś dla pozostałych wartości θ wystarczy zastosować jeden z wyżej wymienionych obszarów. Jeżeli wartość parametru średniej ruchomej jest nieznana, to należy pod uwagę wziąć iloczyn wspólnego obszaru częstości i wspólnego obszaru min/max szeregu.

Dla modeli typu ARMA(2,1), podobnie jak dla modeli AR, wyznaczono wartości funkcji gęstości spektralnej w oparciu o modele ARMA i model PS. Przykładowe wyniki są przedstawione na rysunku 3.1.2. Wartości funkcja gęstości spektralnej otrzymana z wykorzystaniem modelu ARMA jak i modelu PS nie są identyczne ale zachowują ten sam charakter. Oznacza to, że wnioski wyciągnięte na podstawie f.g.s. któregośkolwiek modelu, ARMA czy PS, będą bardzo zbliżone lub identyczne.



Źródło: Obliczenia własne

Rys. 3.1.2 Teoretyczne funkcje gęstości spektralnej modelu ARMA i PS

3.2 Zastosowanie różnych reprezentacji do modelowania i prognozowania danych finansowych

PRZYKŁAD 1

Do analizy empirycznej wykorzystano notowania giełdowe, na rynku podstawowym WGPW dwu spółek publicznych: Amerbanku oraz Farm Foodu.

Amerbank jest spółką z branży bankowej, działa głównie w sektorze średnich i dużych przedsiębiorstw. Pierwsze notowanie akcji na WGPW miało miejsce 9.07.1994 roku. W latach 1995-98 zysk netto firmy rósł. Inwestorem strategicznym firmy jest niemiecki DG Bank. W analizie wykorzystano 126 obserwacji z drugiego półrocza 1999 roku.

Farm Food to spółka z branży przemysłu spożywczego produkująca mięso i jego przetwory. Pierwsze notowanie walorów spółki na WGPW odbyło się 13.10.1995 roku. Inwestorem strategicznym spółki jest Szwedzki Związek Farmerów. Zysk netto firmy w latach 1995-98 spadł z 11373.4 do 1112. Do analizy wykorzystano 123 obserwacje z pierwszego półrocza 1999 roku.

Analiza funkcji autokorelacji oraz funkcji autokorelacji cząstkowej, dla obu firm, wskazywała na model niestacjonarny. Do wyznaczenia stopnia integracji wykorzystano test Dickeya-Fullera (DF), rozszerzony test DF (ADF) oraz statystykę Durbina-Watsona (DW). Wyniki przedstawione zostały w tabeli 3.2.1.

Tabela 3.2.1. Badanie stopnia integracji

		DF	DW	ADF (k=1)	DW
Amerbank	pierwsze różnice	-0,40247	2,655465	-0,42875	2,152113
	drugie różnice	-15,65100	2,436278	-11,37440	2,022058
Farm Food	pierwsze różnice	0,34981	1,661846	0,23459	1,919082
	drugie różnice	-9,22917	1,713995	-8,91944	2,060137

Źródło: Obliczenia własne

Zatem obydwa szeregi są zintegrowane w stopniu pierwszym. Za pomocą funkcji autokorelacji, funkcji autokorelacji cząstkowej oraz kryterium informacyjnego BIC ustalono, że po wyeliminowaniu trendu stochastycznego szereg różnic jest modelem autoregresyjnym rzędu drugiego. Stąd, na mocy twierdzenia 2.2.2, minimalny wymiar PS wynosi również dwa. Dla pierwszych różnic oszacowano niezależnie model ARIMA(2,1,0) oraz model PS. Parametry modelu ARMA szacowano metodą największej wiarygodności, zaś parametry modelu PS otrzymano za pomocą estymatora realizacji stochastycznych.

Niech $\Delta z_t = \eta_t$. Otrzymano następujące modele empiryczne:

➤ dla Amerbanku:

$$\text{ARMA}(2,0): \quad \eta_t = \underset{(0,0883)}{-0,4121}\eta_{t-1} - \underset{(0,0886)}{0,2339}\eta_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (3.2.1)$$

$$R^2 = 0,160767 \quad DW = 2,025096 \quad S_u = 0,890945.$$

$$\text{PS:} \quad \mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0,18628 & 0,37952 \\ -0,37952 & -1,02247 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} 1,156 \\ -1,354 \end{bmatrix} \varepsilon_t, \quad (3.2.2)$$

$$\eta_t = [-0,5598 \quad 0,0637] \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \quad \Delta = 0,120723$$

$$R^2 = 0,454037 \quad DW = 1,599465 \quad S_u = 0,934853.$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{F}$: $\lambda_1 = 0,0522$ $\lambda_2 = -0,888$.

Odpowiednio model PS dla modelu ARMA (3.2.1) ma postać:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,4121 & -0,2339 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} -0,2339 \\ -0,3574 \end{bmatrix} \varepsilon_t, \quad (3.2.3)$$

$$\eta_t = [0 \quad 1] \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t,$$

zaś model ARMA dla modelu PS (3.2.2) można zapisać:

$$\eta_t = -0,8362\eta_{t-1} + 0,0464\eta_{t-2} + \varepsilon_t - 1,5696\varepsilon_{t-1} + 0,8871\varepsilon_{t-2}. \quad (3.2.4)$$

➤ dla Farm Foodu:

$$\text{ARMA}(2,0): \quad \eta_t = \underset{(0,08902)}{0,20967}\eta_{t-1} - \underset{(0,08834)}{0,2398}\eta_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (3.2.5)$$

$$R^2 = 0,086264 \quad DW = 2,060724 \quad S_u = 0,403292.$$

$$\text{PS: } \mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0,653538 & -0,751117 \\ 0,751117 & -0,091322 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} 0,2369 \\ 0,0021 \end{bmatrix} \varepsilon_t, \quad (3.2.6)$$

$$\eta_t = [0,09087 \quad 0,194545] \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \quad \Delta = 0,00228,$$

$$R^2 = 0,043093 \quad DW = 1,946328 \quad S_u = 0,405673.$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{F}$: $\lambda_{1/2} = 0,2811 \pm 0,6522i$, zaś moduł liczby zespolonej wynosi 0,71.

Model PS dla modelu opisanego równaniem (3.2.5) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,2398 & 0,20967 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} 0,2097 \\ -0,19584 \end{bmatrix} \varepsilon_t, \quad (3.2.7)$$

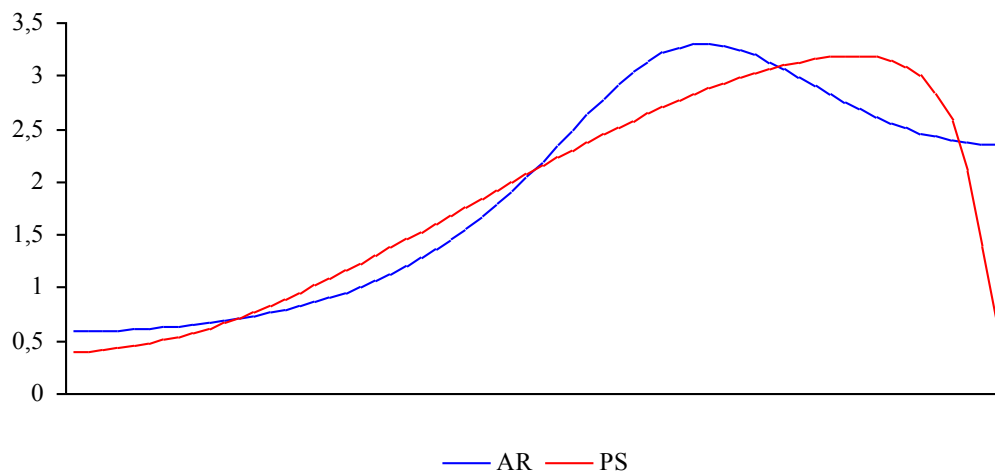
$$\eta_t = [0 \quad 1] \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t,$$

zaś model ARMA dla modelu PS (3.2.6) dany jest równaniem:

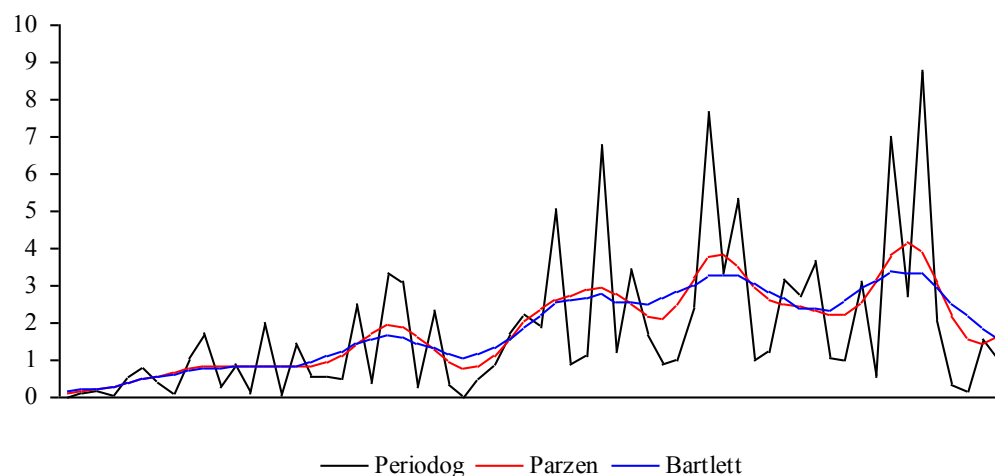
$$\eta_t = 0,5622\eta_{t-1} - 0,5045\eta_{t-2} + \varepsilon_t + 0,5841\varepsilon_{t-1} - 0,4437\varepsilon_{t-2}. \quad (3.2.7)$$

Wartości parametrów autoregresyjnych modelu ARMA w równaniach (3.2.1) i (3.2.4), a także (3.2.5) i (3.2.7) różnią się w znaczącym stopniu. Wynik ten nie zaskakuje, gdyż dla takich wartości parametrów autoregresyjnych modelu ARMA od-

powiednie wartości parametrów autoregresyjnych otrzymanych poprzez model PS rzadko są zbliżone do wartości otrzymanych dla modelu ARMA. Zbieżność parametrów autoregresji dla tego typu procesów zachodzi tylko w 10,2%-21,8% przypadków. Reszty modeli (3.2.1) oraz (3.2.3) nie mają własności ARCH. Modele PS są stabilne i mają minimalny wymiar. Dla różnic cen akcji Amerbanku współczynnik determinacji jest większy dla modelu PS niż dla modelu AR. Natomiast statystyka Durbina-Watsona jest bliższa liczbie 2 dla modelu AR. Wartość odchylenia standardowego składnika resztowego obydwu modeli ((3.2.1) oraz (3.2.2.)) jest porównywalne. W przypadku różnic cen akcji Farm Foodu wartości parametrów struktury stochastycznej obu modeli przyjmują zbliżone wartości.

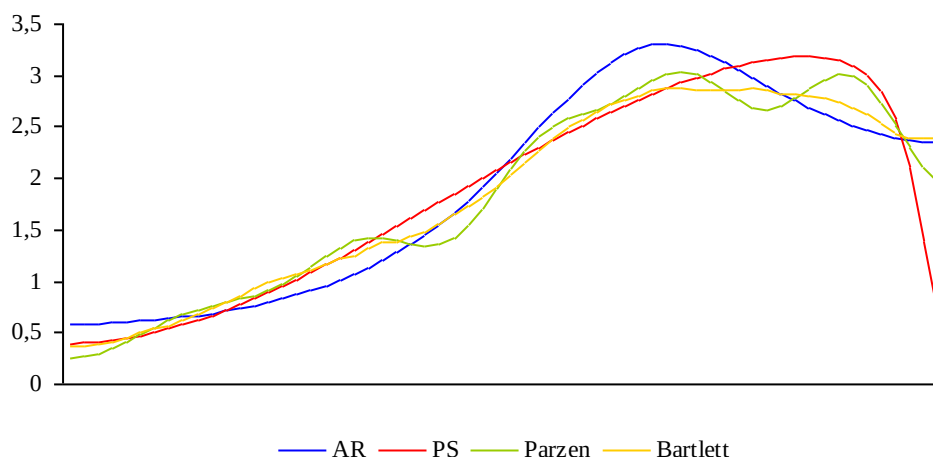


Rys.3.2.1. Teoretyczne funkcje gęstości spektralnej modelu AR oraz modelu PS dla Amerbanku

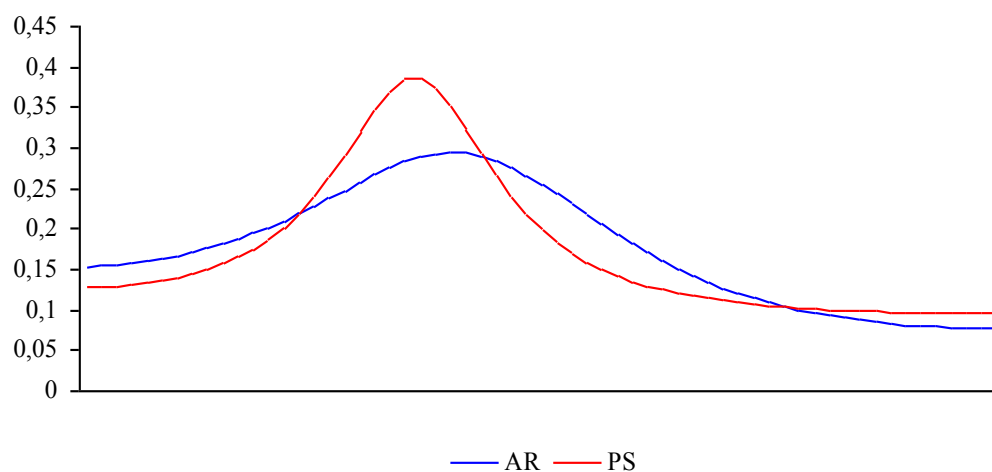


Rys.3.2.2. Periodogram oraz wygładzony periodogram ($M=13$) dla Amerbanku

Do analizy widmowej obydwu szeregów zastosowano: teoretyczną funkcję gęstości spektralnej modelu AR, teoretyczną f.g.s. modelu PS oraz periodogram. Do wygładzenia periodogramu zastosowano okna: Bartletta i Parzena. Otrzymane wyniki przedstawiono na rysunkach 3.2.1 – 3.2.6.



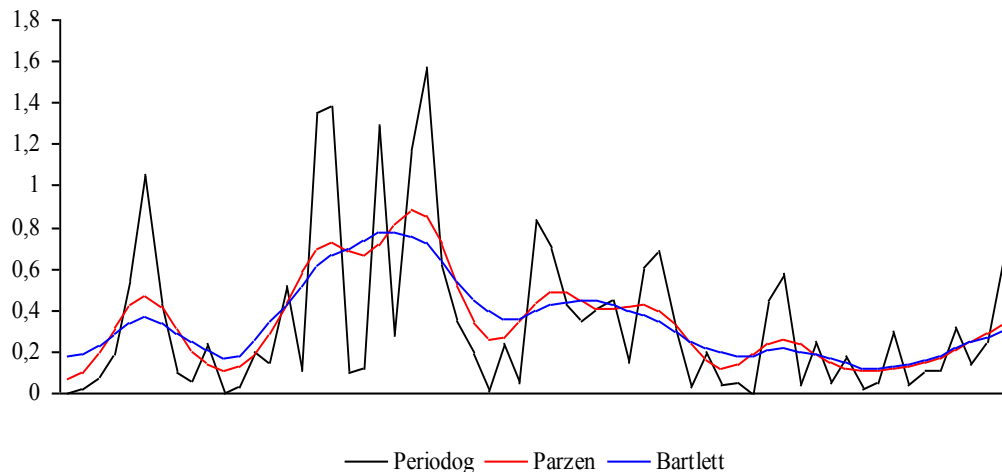
Rys.3.2.3. Teoretyczne funkcje gęstości spektralnej oraz wygładzony periodogram ($M=25$) dla Amerbanku



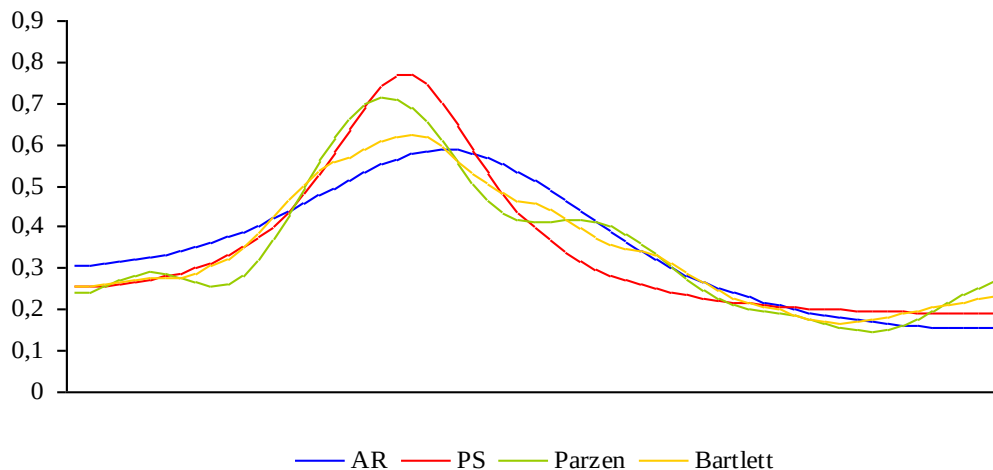
Rys.3.2.4. Teoretyczne funkcje gęstości spektralnej modelu AR oraz modelu PS dla Farm Foodu

Żadna z wartości periodogramu nie jest istotna. Okno Parzena, które ma największą szerokość a zatem najmniejszą wariancję i największe obciążenie najsłabiej wygładza periodogram. Natomiast okno Bartletta, które jest drugie co do szerokości, ma

zatem większą trochę wariancję ale mniejsze obciążenie najlepiej wygląda periodogram. Teoretyczne f.g.s. mają zbliżony kształt choć różnią się wartością częstości dla której f.g.s. osiąga maksimum. Ekstremum f.g.s. dla modelu AR wskazuje na skumulowanie się dużych wartości periodogramu, zaś ekstremum f.g.s dla modelu PS jest bliżej częstości, dla której periodogram uzyskuje maksimum.



Rys.3.2.5. Periodogram oraz wygładzony periodogram ($M=13$) dla Farm Foodu



Rys.3.2.6. Teoretyczne funkcje gęstości spektralnej oraz wygładzony periodogram ($M=25$) dla Farm Foodu

Podobnie jak dla Anerbanku analiza widmowa szeregu Farm Foodu nie wskazuje na okresowość. Również w tym przypadku f.g.s. dla modelu PS jest bliższa wykrycia częstości, dla której periodogram przyjmuje maksymalną wartość. Brak udziału istotnych częstości dla modeli ARMA opisanych równaniami (3.2.1), (3.2.5) po-

twierdzony jest wynikami zamieszczonymi w tabeli 3.1.4. Dla współczynników autokorelacji modeli opisanych równaniami (3.2.1) i (3.2.5) wartość maksymalna f.g.s. ma nie jest istotna. Pomimo, iż współczynniki autokorelacji oraz analiza widnowa wskazują na małą przydatność modelu PS do przewidywania kierunku zmian wartości szeregu różnic, to w obydwu przypadkach za pomocą modelu PS prawidłowo przewidziano zmianę wartości szeregu różnic². Dla oszacowanych modeli (3.2.1)–(3.2.4) obliczono wartości prognozy. Wyniki zamieszczone są w tabelach 3.2.2–3.2.3.

Tabela 3.2.2. Wartości prognozy ceny akcji Amerbanku

Okres prognozowania T	Wartość rzeczywista	Wartość prognozy		Średni błąd predykcji ex post		Względny błąd średni predykcji ex post	
				$\hat{\sigma}_{yT}$		$\hat{V}_T$	
		ARIMA	PS	ARIMA	PS	ARIMA	PS
1	30,2	30,18	29,83	0,021870	0,370830	0,000724	0,012279
2	29,6	30,34	29,93	0,522544	0,348944	0,017654	0,011789
3	28,0	30,23	29,84	1,356806	1,098212	0,048457	0,039222
4	30,0	30,24	29,92	1,181024	0,952016	0,039367	0,031734
5	30,7	30,26	29,85	1,074502	0,933277	0,035000	0,030400
6	30,0	30,25	29,91	0,986147	0,852793	0,032872	0,028426
7	30,0	30,25	29,85	0,917813	0,791493	0,030594	0,026383
8	30,0	30,25	29,90	0,863123	0,741190	0,028771	0,024706
9	30,0	30,25	29,86	0,818100	0,700399	0,027268	0,023347
10	30,0	30,25	29,90	0,780069	0,665258	0,026002	0,022175

Źródło: Obliczenia własne

Dla ceny akcji Amerbanku względny błąd średni predykcji modelu PS wynosi 1,2%–3,9%, zaś modelu ARIMA 0,07%–4,8%. Zatem jakość prognozy obydwu modeli nie jest zadowalająca³. Wyjątek stanowi prognoza na pierwszy okres modelu ARIMA. Wartości prognozy modelu PS są niedoszacowane (z wyjątkiem 2 i 3 okresu), zaś modelu ARIMA są przeszacowane.

² Biorąc pod uwagę wyniki symulacji zamieszczone w tabeli 3 należy zauważyć, że obszar związany z otrzymanymi parametrami jest obszarem granicznym pomiędzy przydatnością modelu PS do przewidywania zmiany kierunku a jej brakiem.

³ Uzyskane wartości względnego błędu predykcji ex post byłyby satysfakcjonujące w przypadku innych procesów ekonomicznych. W przypadku stóp zwrotu z akcji na WGPW, dla których obszar zmienności wynosi (-10%;+10%), 4,8% błąd predykcji jest w istocie znacznie większy.

Tabela 3.2.3. Wartości prognozy ceny akcji Farm Food

Okres progno- zowania T	Wartość rzeczywista	Wartość prognozy		Średni błąd predykcji ex post		Względny błąd średni predykcji ex post	
				$\hat{\sigma}_{yT}$		$\hat{V}_T$	
		ARIMA	PS	ARIMA	PS	ARIMA	PS
1	15,2	14,43	14,50	0,774937	0,695792	0,050983	0,045776
2	14,9	14,39	14,46	0,657786	0,583589	0,044147	0,039167
3	14,9	14,40	14,43	0,611111	0,549215	0,041014	0,036860
4	14,5	14,41	14,43	0,531296	0,476749	0,036641	0,032879
5	14,9	14,41	14,45	0,523924	0,470766	0,035163	0,031595
6	14,4	14,40	14,46	0,478277	0,430464	0,033214	0,029893
7	14,5	14,40	14,45	0,444304	0,398896	0,030642	0,027510
8	14,1	14,40	14,45	0,429268	0,392918	0,030445	0,027867
9	13,9	14,40	14,45	0,438215	0,412945	0,031526	0,029708
10	14,0	14,40	14,45	0,434918	0,416832	0,031066	0,029774

Źródło: Obliczenia własne

Dla ceny akcji Farm Food względny błąd średni predykcji modelu PS wynosi 2,7%–4,5%, zaś modelu ARIMA 3%–5%. Jakość prognozy obydwu modeli nie jest zadawalająca. W krótkim okresie wartości prognoz modeli PS i ARIMA są niedoszacowane, zaś w dłuższym wartości prognoz obydwu modeli przeszacowują wartości rzeczywiste.

Do prognozy kierunku zmiany wartości szeregów różnic można zastosować model PS, natomiast do predykcji żaden z modeli nie jest wystarczająco dobry.

PRZYKŁAD 2

Do analizy empirycznej wykorzystano produkcję sprzedaną przemysłu w cenach stałych. Zebrane dane są danymi miesięcznymi z okresu I.1991–VIII.1999. Wstępna analiza wskazywała na sezonowość danych zatem korzystając z metody Census 1 oczyszczono szereg danych z sezonowości. Następnie zbadano istnienie trendu stochastycznego. Otrzymano następujące wyniki statystyk DF oraz DW:

- dla pierwszych różnic: $DF = 0.694054$, $DW = 2.648948$,
- dla drugich różnic: $DF = -14.80345$, $DW = 2.154132$.

Stąd oczyszczony z sezonowości szereg jest zintegrowany w stopniu pierwszym. Następnie dla szeregu różnic wyznaczono rząd autokorelacji oraz rząd średniej ruchomej.

Tabela 3.2.4. Wyniki estymacji modeli ARMA

p \ q	0	1	2	3
0		934,723 931,149	934,597 928,400	934,485 925,909*
1	935,149 931,611	936,246 930,246*	936,083 927,812*	933,739 922,775
2	934,121 927,859*	930,937 921,816	911,881 898,891	930,050 926,305*
3	926,511 916,904	916,489 901,522*	915,021 900,952*	916,479 898,589

górna liczba prezentuje wartość BIC dolna liczba prezentuje wartość $-2 \ln L$

* model z nieistotnymi parametrami

Źródło: Obliczenia własne

Kryterium BIC typuje model ARMA(2,2) natomiast funkcja wiarygodności model ARMA(3,3). Wartość funkcji wiarygodności dla modelu ARMA(2,2) niewiele odbiega od wartości funkcji wiarygodności dla modelu ARMA(3,3). Test LR wskazuje na wybór modelu ARMA(2,2). Oszacowano wartości parametrów modelu ARMA oraz modelu PS. Niech $\Delta z_t = \eta_t$. Wówczas model ARMA ma postać

$$\eta_t = \underset{(0,0454)}{-1,112} \eta_{t-1} - \underset{(0,0461)}{0,954} \eta_{t-2} + \varepsilon_t + \underset{(0,123)}{0,906} \varepsilon_{t-1} + \underset{(0,072)}{0,833} \varepsilon_{t-2}, \quad \Delta z_t = \eta_t,$$

zaś model PS opisany jest równaniami:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} -1,01832 & -0,9815 \\ 0,981497 & 0,000205 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} -18,2629 \\ 6,053733 \end{bmatrix} \varepsilon_t,$$

$$\eta_t = [-0,40185 \quad 13,53486] \cdot \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \quad \Delta = -2,03909,$$

gdzie macierz Hankela ma postać

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -183,031 & -10,8786 \\ -10,8786 & 187,3576 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{F}$: $\lambda_{\frac{1}{2}} = -0,509055 \pm 0,839043i$, zaś moduł liczby zespolonej wynosi 0,98139.

Wartości parametrów struktury stochastycznej obu modeli przedstawiono w tabeli 3.2.5.

Tabela 3.2.5 Ocena parametrów struktury stochastycznej rozważanych modeli

Model	S_u	V_u	R^2	statystyka DW
ARMA(2,2)	21,20647	3,539697	0,323373	2,108112
PS	22,56619	3,766656	0,489929	2,749604

Źródło: Obliczenia własne

Współczynnik determinacji modelu PS jest znacznie większy niż dla modelu ARMA. Błąd standardowy reszt oraz współczynnik zmienności losowej są porównywalne dla obydwu modeli. Natomiast statystyka DW wskazuje na autokorelację reszt w przypadku modelu PS.

Wyznaczono wartości prognozy na 1, 2 oraz 3 okresy w przód. Otrzymane wyniki zamieszczono w tabeli 3.2.6.

Tabela 3.2.6. Wartości prognozy produkcji sprzedanej przemysłu w cenach stałych

Okres prognozowania T	Wartość rzeczywista	Wartość prognozy		Średni błąd predykcji ex post		Względny błąd średni predykcji ex post	
				$\hat{\sigma}_{yT}$		$\hat{V}_T$	
		ARIMA	PS	ARIMA	PS	ARIMA	PS
1	802,72	814,25	821,97	11,5233	19,2448	0,0144	0,0240
2	798,80	789,91	768,30	10,2911	25,5036	0,0129	0,0319
3	847,49	806,67	808,32	25,0206	30,7407	0,0295	0,0363

Źródło: Obliczenia własne

Względny błąd średni predykcji modelu PS wynosi 2,4%–3,6%, zaś modelu ARIMA 1,4%–2,9%. Zatem jakość obydwu prognoz jest zadawalająca. Przy prognozie na 1 okres wartości prognoz obydwu modeli są przeszacowane, zaś w pozostałych przypadkach są niedoszacowane.

Do predykcji mogą być wykorzystane obydwa modele, przy czym lepszym modelem jest model ARIMA.

Reasumując otrzymane wyniki można wyciągnąć wniosek, że w modelu PS częściej niż w modelu ARMA występuje autokorelacja reszt.

3.3 Wnioski

1. Zbieżność ocen parametrów modelu AR oszacowanych różnymi metodami estymacji zależy od wartości tych parametrów.
2. Model PS może być wykorzystany do przewidywania kierunku zmiany wartości procesu na dwa okresy w przód, przy czym dla modelu AR dotyczy to zwłaszcza przedziału częstości średnich $\left[\frac{1}{3}\pi; \frac{23}{30}\pi\right]$. Dla modelu ARMA należy pamiętać, iż obszar wyznaczony przez wartości parametrów dla którego występują ekstrema lokalne w $(T + 2)$ okresie, są dla różnych wartości parametrów średniej ruchomej różne. Zatem aby stwierdzić przydatność otrzymanego modelu ARMA(2,1) do przewidywania kierunku zmiany wartości procesu na dwa okresy w przód należy wziąć pod uwagę obszar wspólny częstości średnich i obszaru występowania min/max dla danej wartości θ .
3. Wartości teoretycznej funkcji gęstości spektralnej modelu PS są zbliżone do wartości teoretycznej f.g.s modelu ARMA. Kierując się niezależnie wartościami f.g.s. modelu ARMA czy modelu PS otrzymuje się te same wnioski, co potwierdza równoważność analizowanych reprezentacji.

ZAKOŃCZENIE

Celem pracy była teoretyczna i empiryczna analiza związków pomiędzy poszczególnymi reprezentacjami oraz ocena ich przydatności w analizach ekonomicznych. Wykazana została matematyczna równoważność poszczególnych reprezentacji. Najbardziej uniwersalna okazała się reprezentacja przestrzeni stanów, gdyż nie narzuca badaczowi konieczności wcześniejszej identyfikacji rzędów opóźnień AR i MA. Funkcja autokowariancji pełni bardzo ważną rolę, gdyż za pomocą każdej z reprezentacji można otrzymać funkcję autokowariancji, natomiast za pomocą funkcji autokowariancji można wyznaczyć każdą reprezentację. Teoretyczna równoważność została poddana empirycznej weryfikacji. W badaniach empirycznych różne reprezentacje dawały czasem różne wyniki. Było to widoczne szczególnie przy badaniu zbieżności parametrów autoregresyjnych otrzymywanych różnymi metodami estymacji. Zbieżność parametrów zależała od ich poziomu. Przypadek ten nie przeczy równoważności reprezentacji, a jedynie zwraca uwagę na efektywność wykorzystywanych estymatorów. Problem ten jednak wykracza poza ramy niniejszej pracy.

Oprócz równoważności modeli pokazano możliwość wykorzystania modelu PS do prognozowania kierunku zmiany wartości szeregu na dwa okresy w przód. Zbadano również dla jakich podzbiorów parametrów modelu ARMA, czy też wartości częstości można poprzez model PS poprawnie przewidzieć zmianę wartości szeregu. Jednoczesna analiza wszystkich trzech reprezentacji daje pełniejszy obraz badanego szeregu, a co za tym idzie pozwala na uzyskanie lepszych wyników.

Prognozy w oparciu o model ARMA formułowane są na krótki okres, zatem mogą informować o skali odchylenia od długookresowej ścieżki rozwoju. W zależności od stopnia agregacji szeregów czasowych mogą być także podstawą korekty prognoz średnio i długookresowych. Prognozy krótkookresowe powtarzające się

w kolejnych jednostkach czasu mogą być sygnałem ostrzegawczym dla prognoz średnio i długookresowym.

Zasadnicze spostrzeżenia wpływające z badań przeprowadzonych w niniejszej pracy można przedstawić w postaci następujących wniosków:

1. Za pomocą każdej z reprezentacji można otrzymać funkcję autokowariancji, natomiast za pomocą funkcji autokowariancji można wyznaczyć każdą z reprezentacji.
2. Postać modelu PS informuje o maksymalnym rzędzie autoregresji lub średniej ruchomej modelu ARMA. Jeżeli model PS jest modelem minimalnym, to rząd autoregresji lub rząd średniej ruchomej jest równy wymiarowi wektora stanu.
3. Zbieżność ocen parametrów modelu AR oszacowanych różnymi metodami estymacji zależy od wartości tych parametrów.
4. Model PS może być wykorzystany do przewidywania kierunku zmiany wartości procesu na dwa okresy w przód, przy czym dla modelu AR dotyczy to zwłaszcza przedziału częstości średnich $[\frac{1}{3}\pi; \frac{23}{30}\pi]$. Dla modelu ARMA należy pamiętać, iż obszar wyznaczony przez wartości parametrów, dla którego występują ekstrema lokalne w $(T + 2)$ okresie są dla różnych wartości parametrów średniej ruchomej różne. Zatem, aby stwierdzić przydatność otrzymanego modelu ARMA(2,1) do przewidywania kierunku zmiany wartości procesu na dwa okresy w przód należy wziąć obszar wspólny częstości średnich i obszaru występowania min/max dla danej wartości θ .
5. Wartości teoretycznej funkcji gęstości spektralnej modelu PS są zbliżone do wartości teoretycznej f.g.s modelu ARMA. Kierując się niezależnie wartościami f.g.s. modelu ARMA czy modelu PS otrzymuje się te same wnioski, co potwierdza równoważność analizowanych reprezentacji.

Należy zwrócić uwagę, że prezentowana praca nie wyczerpuje wszystkich możliwości zastosowania modelu przestrzeni stanów. Wykraczając poza reprezentację jednowymiarowych szeregów czasowych ciągle niezbadane pozostają takie obszary zastosowań modelu przestrzeni stanów jak: modele nieliniowe, modele wielorównaniowe, modele procesów niestacjonarnych, modele ARCH oraz wiele innych. Naturalnym rozszerzeniem zakresu badań może także być analiza równoważności

omawianych w pracy reprezentacji dla przypadku wielorównaniowych procesów stochastycznych.

DODATEK

W tabelach 1-4 zamieszczone zostały wyniki badania zbieżności parametrów autoregresyjnych otrzymanych za pomocą KMNK oraz modelu PS dla modeli typu AR. Liczby oznaczają procentowe udziały zbieżności parametrów autoregresyjnych, zaś pozostałe oznaczenia są następujące:

- wytłuszczenie – liczby z przedziału $[0; 25)$,
- kursywa – liczby z przedziału $[25; 50)$,
- podkreślenie – liczby z przedziału $[50; 75)$,
- normalny – liczby z przedziału $[75; 100]$.

Tabela 5, to procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w min/max szeregu dla modelu ARMA. Liczby oznaczają procent poprawnej prognozy. Obszary występowanie min/max.

W tabelach 6-23 zamieszczone są wyniki badania procentowego udziału min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA. Liczby oznaczają procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów, zaś obszary wyróżniają skrajne przypadki.

Tabele 24-41 zawierają wyniki procentowego udziału poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie ekstremów lokalnych modelu ARMA (liczby w tabelach). Obszar zacieniony to obszar występowania ponad 90% ilości min/max szeregu dla konkretnego θ , zaś pozostałe oznaczenia są następujące:

- podkreślony – wspólny obszar ponad 90% udziału min/max dla dowolnego θ ,
- pogrubiony – wspólny częstości średnich (3.1.1) dla dowolnego θ ,
- otoczony grubą linią – obszar częstości średnich dla konkretnego θ .

Tabela 1. Udziały ϕ_1 (rozpiętość 10% zadanej wartości parametru) dla modelu AR(2)

$\phi_1 \backslash \phi_2$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	100	99,4															
-1,6	100	98,8	95														
-1,5	99,8	98,8	80,4	<u>77,6</u>													
-1,4	99,4	94,4	94	<u>70,2</u>	<u>52,6</u>												
-1,3	99,8	97	91,4	<u>74,8</u>	<u>53,2</u>	28,4											
-1,2	99,2	93	89	<u>73,4</u>	49,4	34	20										
-1,1	99	95,4	77,6	<u>74,2</u>	45,8	32,2	15,6	8									
-1	97,8	96,6	83,2	<u>70,4</u>	48,2	33,4	17,2	8,2	4,6								
-0,9	99,4	82,2	80,6	<u>62,2</u>	45,6	33,4	18	7,2	6,4								
-0,8	99,4	<u>70,8</u>	77,4	<u>57,4</u>	44,2	31,2	13	4,2	3,4	5,4							
-0,7	94,4	88,6	<u>72,2</u>	<u>58,8</u>	43	28,2	13,6	8,2	5,2	5,8							
-0,6	96,2	84,2	<u>56,2</u>	<u>42,8</u>	39,2	27,8	14,2	5	3,2	3,6	6,4	8,4					
-0,5	95	80,8	<u>65,6</u>	49,4	35	20,2	15,8	6,6	2,4	4,2	4,4	8	11,6				
-0,4	84,4	<u>74</u>	<u>60</u>	40,4	29	24,2	11,8	5,8	2,6	3,8	3,8	7,6	14	17,6			
-0,3	<u>73,8</u>	<u>61</u>	46,8	33	21,6	17,6	10,6	5	1,4	2	4,4	7	12,6	17	20,6		
-0,2	<u>50,8</u>	<u>51,2</u>	35,2	26,6	16,2	12,6	9,8	2,6	2,4	1,2	3,4	8,8	10,6	17	20,2	27	
-0,1	<u>41,8</u>	34,2	19	13,8	9,6	7,6	5,4	3,2	0,4	1,2	2,6	4,8	4,2	6,4	14	15,4	30
0,1	<u>54,2</u>	28,4	17	14,2	8	7,2	4	3	0,4	0,8	1,8	4,2	4,8	8	12,4	16,6	24,8
0,2	76,2	<u>50,2</u>	35,8	26,8	18	12,8	9,2	5	1,8	1,6	4,4	5,4	8,6	15	19,2	24,2	
0,3	<u>56,4</u>	<u>66,4</u>	45	32,8	22	17,8	10,6	4,4	1,2	2,6	6	7,2	10,6	19,8	20,8		
0,4	80,8	<u>72,8</u>	<u>54,8</u>	37,2	25,8	18,4	9	4,6	2,2	1,8	4,6	8,6	11,8	17,2			
0,5	92,2	75,8	<u>53,6</u>	<u>52,6</u>	34	23,6	12,2	6,8	2,4	3,4	5,4	8,8	15,4				
0,6	89,4	<u>67,6</u>	<u>66,8</u>	<u>54,4</u>	38,2	21	11,8	6,2	3,6	3,8	2,6	6,4					
0,7	98,4	50	<u>60,8</u>	<u>46,4</u>	40,4	28,2	16,8	8,4	4,2	5	3,8						
0,8	89,8	93,6	81,2	<u>59,4</u>	44,8	30,6	15,4	5,8	5,6	5,4							
0,9	99	91,4	74	61,4	48,4	32,6	16,8	8,2	5								
1	99,8	86,8	83,6	<u>59,8</u>	43,4	27,8	15,4	7,4	6								
1,1	98,8	92,4	90	71,4	<u>52,6</u>	32,6	17,6	7									
1,2	99	98,4	82,4	<u>69,6</u>	<u>54,8</u>	32,4	16,6										
1,3	99,8	97	89,4	75,4	<u>57</u>	30,6											
1,4	100	98,2	91,4	<u>59,8</u>	<u>54,4</u>												
1,5	100	98	89,2	81													
1,6	100	95,4	95,8														
1,7	100	97,2															
1,8	100																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 2. Udziały ϕ_2 (rozpiętość 10% zadanej wartości parametru) dla modelu AR(2)

$\phi_1 \backslash \phi_2$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	98,4																
-1,7	99,2	87,8															
-1,6	97,6	83,2	50														
-1,5	92,4	78,8	<u>55</u>	<u>44,4</u>													
-1,4	98	91	81,4	<u>44,8</u>	<u>22,4</u>												
-1,3	98,6	90,8	87,8	<u>55,6</u>	29	12,2											
-1,2	99,4	93,4	84,4	<u>65,6</u>	<u>31,6</u>	16,6	6,6										
-1,1	99,8	94	86,2	<u>70,6</u>	40,4	20	6,6	2,6									
-1	94	97,4	88,6	75,8	<u>54,4</u>	25,6	8	1,6	0,6								
-0,9	99,8	95,8	78,8	78,8	47	31	8,2	1,2	1,2								
-0,8	92,2	81,2	90	<u>65,8</u>	<u>62,6</u>	41,4	14,8	3	0,6	0,8							
-0,7	94,6	97	87	70	60	45,8	25,4	6,6	1,2	0,8	2,2						
-0,6	95,8	97,2	<u>62,6</u>	<u>57,4</u>	<u>52,2</u>	39,4	27,6	8,8	2,4	1	2	5,6					
-0,5	99,8	89,2	78,8	<u>67,4</u>	<u>52,8</u>	38,6	24,2	15,6	1,8	0,6	2,6	6,6	12				
-0,4	100	81	<u>70,8</u>	56	<u>55,4</u>	32,6	17,8	10,4	1,4	2,2	7,2	11,8	20,6				
-0,3	92	93,8	84,4	<u>60,8</u>	44,6	25,2	16,6	7,6	2,8	0,6	2,8	9,8	17,4	31,2	41,2		
-0,2	99,6	92	80,4	<u>57,2</u>	44,6	27	14,4	5,2	1,4	1,2	4,8	11,4	21,2	36,4	54,6	58,6	
-0,1	100	81	77,8	<u>56,8</u>	37,4	27	14,6	6	2	1,6	7,2	12,2	25,6	37,4	59	56,8	93
0,1	98,4	92,8	<u>67</u>	<u>58</u>	41,4	28,8	12,4	6,4	1,8	0,8	6,6	13,6	23,2	39	<u>55,8</u>	<u>68,8</u>	86,8
0,2	99,8	92,6	<u>54,4</u>	<u>54,6</u>	43,6	26,8	11,8	5,8	1,8	0,8	3,4	10,2	19,8	35,2	42,6	<u>73,4</u>	
0,3	100	85	<u>74,8</u>	<u>67,6</u>	33,6	30,8	16,6	9	4,2	1,2	3,6	8,6	17,6	28,8	39,2		
0,4	98,2	87,8	81	43,6	<u>51,2</u>	29,8	19,6	9,4	1,6	1,6	3,2	7,4	10,6	21,6			
0,5	99,8	81,8	<u>71,2</u>	<u>69,6</u>	48,4	29	23,8	17,6	1	0,8	2,8	5,8	12,6				
0,6	100	85,2	78,6	<u>62,6</u>	<u>55</u>	35,8	26	6,4	0,6	1,4	3,2	4,8					
0,7	99,8	90,6	75,6	<u>66,2</u>	<u>61,8</u>	46,2	22,8	3,4	1,4	0,8	1,4						
0,8	96,6	86,8	88,4	<u>65,6</u>	<u>57,2</u>	34,8	14,8	4,6	0,6	0,8							
0,9	97,8	96,4	44,4	<u>75</u>	<u>59,2</u>	30,2	9,8	2,8	1,2								
1	99,6	97,4	<u>75</u>	<u>73</u>	46,2	18,8	7	1,6	1								
1,1	100	78,6	<u>87,6</u>	<u>70,8</u>	43,6	23	6,8	1,8									
1,2	99	95,8	<u>61,6</u>	50	32	16,2	4										
1,3	99,2	95,4	77,4	50	28,4	9,4											
1,4	95,8	<u>69,2</u>	75,8	40,6	22,8												
1,5	99,8	94,4	47,2	42													
1,6	99,8	80	<u>72,4</u>														
1,7	99,8	<u>70,8</u>															
1,8	99,2																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 3. Udziały ϕ_1 (rozpiętość 30% zadanej wartości parametru) dla modelu AR(2)

$\phi_1 \backslash \phi_2$	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
-1.8	100																
-1.7	100	100															
-1.6	100	100	100														
-1.5	100	100	100	100	99.6												
-1.4	100	100	100	100	96.6												
-1.3	100	100	100	99.4	97	75											
-1.2	100	100	99.8	99.8	94.8	77.8	45.8										
-1.1	100	100	100	99.8	92.8	76.8	45.8	23.8									
-1	100	100	99.8	99	94.8	76.4	44.8	25.4	16.6								
-0.9	100	100	100	99.8	93.8	73.4	46.4	21.4	16								
-0.8	100	100	100	99	92.6	77.4	44.2	19	15.2	17.4							
-0.7	100	100	100	99.6	90.6	69.8	40.6	21.6	14.4	12.8	17.8						
-0.6	100	100	99.2	91.8	83.2	72.8	43.6	18.6	10.4	13.2	18.2	28.2					
-0.5	100	100	98.6	92.8	82.8	59	39.8	16.2	7.6	11.4	12.4	27.4	39				
-0.4	100	100	98	90.8	75.6	57.8	36.8	19.4	9.4	8	14	26.8	38.2	53			
-0.3	99.8	99.6	93.4	84.2	61.2	51.2	34.8	16.6	5	7.8	13	22.8	36	52.2	58.8		
-0.2	99.2	96.2	82.8	67.8	46.8	38.4	27.4	11.4	4.2	4.2	11.6	23.2	31.8	40.8	54.6	67.2	
-0.1	92.2	77	49.6	35.2	26.2	18.6	13.2	8.8	2.4	3	7.2	10.8	19.4	24	35.2	46.8	64.6
0.1	95.8	72	51	36.6	26.4	19.4	12.6	8.6	1.4	2.6	5.6	13	16	26.4	36.4	48.8	62.4
0.2	100	95.8	79.2	64.2	48.4	37.8	26.4	12.8	4.6	4	11.4	18.2	30.2	39	52.8	69.2	
0.3	100	99.4	94	79.4	68	46.2	34.4	12.6	4.4	6.6	12.6	23.4	36.2	52.8	62.2		
0.4	100	100	96.2	87.8	73.6	57.6	34.2	17	7.8	8.4	14	26.8	34.2	51			
0.5	100	100	100	99.4	95.2	81.2	38.2	19.4	10.4	11	17.8	27	44.6				
0.6	100	100	99.2	98	83.2	62.4	37	20.2	10	11.4	14.8	23.4					
0.7	100	100	99.4	92.4	86.6	75.4	45.2	22.2	12.6	14.2	14.6						
0.8	100	100	100	99	93.2	72.2	43.4	22.2	15.4	14.4							
0.9	100	100	100	99.2	94.4	77.4	46.6	23.2	17								
1	100	100	100	99.4	93.6	77.2	44.4	24	16.6								
1.1	100	100	100	99.4	93.8	75.4	43.6	20.8									
1.2	100	100	100	100	95.2	75.6	41.8										
1.3	100	100	100	99.8	97.2	74.6											
1.4	100	100	100	99.8	95.4												
1.5	100	100	100	99.8													
1.6	100	100	100														
1.7	100	100															
1.8	100																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 4. Udziały ϕ_2 (rozpiętość 30% zadanej wartości parametru) dla modelu AR(2)

$\phi_1 \backslash \phi_2$	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
-1.8	100																
-1.7	100	100															
-1.6	100	100	100	99.2													
-1.5	100	100	98	90.8													
-1.4	100	100	99.8	94.8	62.6												
-1.3	100	100	100	96.8	77.4	30											
-1.2	100	100	99.8	98.8	78.4	41.6	16.8										
-1.1	100	100	100	99.6	92.4	53.4	16.4	6.2									
-1	100	100	100	100	96.8	66	23.2	5	1.2								
-0.9	100	100	100	100	94.6	73.6	29	7.2	3								
-0.8	100	100	100	99.8	99.6	87.2	42.6	9.8	2	2							
-0.7	100	100	100	100	98.8	94	60.4	15.2	4	2.6	7						
-0.6	100	100	100	100	98	90.8	70.4	24.4	4.4	2.6	5.4	14.4					
-0.5	100	100	100	99.4	97.8	82.4	64.4	37.6	5.2	2.8	5.6	18.8	33.6				
-0.4	100	100	100	99.6	92.2	77	55.8	33	8.2	3	7.6	22.6	40.8	65.6			
-0.3	100	100	100	99.2	90.6	70.8	47.8	22.8	11.2	3.4	11.8	26.4	50.4	73.6	89.2		
-0.2	100	100	100	98.2	89.8	68.4	42.6	19.6	4.8	3.2	13.8	35.6	58.2	79	97	97.4	
-0.1	100	100	99.8	97.6	85	65.2	38.8	17.8	4	3.6	16.2	35.4	63.8	86.4	97.6	99.4	100
0.1	100	100	99.6	92.2	90.8	69.6	37	15.8	4.6	3	16.8	39	64.8	86.8	98	100	100
0.2	100	100	99.6	99.6	90.2	69.4	37.2	19.4	5.6	4.4	14.2	30.2	55.6	79.8	88.6	100	
0.3	100	100	100	100	89	70.8	46.6	24.4	12.8	3.4	8.8	28	50.8	71.6	90.8		
0.4	100	100	100	97.2	94	79.4	52.4	28	9	2.6	10.4	24	36.4	62.6			
0.5	100	100	100	99.4	95.2	81.2	67	41.8	3.6	2.8	9.2	18.6	37				
0.6	100	100	100	99.6	95.4	85.6	71.2	22.2	3.4	3.6	6	12.4					
0.7	100	100	100	99.6	99.4	93.6	61	14.8	2.8	2	4						
0.8	100	100	100	99.8	97.6	85.2	41.2	10.6	2	1.8							
0.9	100	100	99.8	100	98	78.2	29.8	8.8	3								
1	100	100	100	99.6	95	65	19.4	5.6	2.6								
1.1	100	100	100	99.4	86.4	50.6	18.6	4.2									
1.2	100	100	99.8	99.2	81	41.4	15										
1.3	100	100	100	97.2	77.8	32											
1.4	100	100	100	89.8	64.6												
1.5	100	100	100	92.8													
1.6	100	100	98.8														
1.7	100	100															
1.8	100																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 5. Procentowy udział poprawnego kierunku w min/max szeregów dla modelu AR(2)

Φ/Ψ	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	37,6																
-1,7	100	37,4															
-1,6	63,6	36	42,4														
-1,5	71,4	63,9	39,7	43													
-1,4	74,8	72,7	73	39,3	43												
-1,3	74,8	68,6	68,3	42,4	32	37,4											
-1,2	74,2	74	73,4	72,3	34,3	34,5	42,2										
-1,1	76,4	78,4	73,8	72,2	74,2	41,3	32,9	35,7									
-1	82	81	76,4	75	73,4	42,7	32,1	32,9	39,9								
-0,9	83,8	84,6	79	75	73,8	65	25,2	30,2	34,7								
-0,8	83,8	79,6	80	74,4	81,4	73,1	51,6	29,4	32,6	40,7							
-0,7	83,4	84	84	82,4	78	75,2	72,5	33,6	33,8	35,8	46,3						
-0,6	89,2	83,4	80,8	85	81,6	78,6	77,9	60,7	26,9	32,7	35	42,2					
-0,5	86,2	87,8	84,8	84,6	79	77,8	77,8	70,6	28,9	28,3	37,5	35,7	44,2				
-0,4	90	88,6	84,4	84,4	82,6	78	78,8	75	47,6	26,5	32,6	32,8	34,6	41			
-0,3	91,6	87	85,2	85,6	80,6	80,8	81,4	77,5	64,8	29,3	30,3	32,3	38,4	35,2	38,8		
-0,2	91,2	91	87	84,4	79,4	83,2	77,3	73,5	70,4	30,5	28,9	29,2	32,4	32,2	33,4	41,2	
-0,1	94	88,6	86,6	83,8	82,2	80,4	74,3	73	58,2	37	30,4	31,3	28,8	31	35,2	35,6	43,8
0,1	92,6	92,6	87	84,2	82,2	80,6	78	68,5	55,7	50	47,3	35,8	34,3	32	35,4	39,2	37,8
0,2	93,6	90,4	88,6	86	85,6	80,4	78	68,2	52,1	58,5	39,5	29,8	31,7	37,2	39,5	41,9	
0,3	91	88,6	88,2	86,6	81,2	79	74,9	72,3	58,1	65,8	40	50	33,3	38	40,5		
0,4	90,4	86,6	88,4	84	83,6	81,3	79,6	70,7	64,1	80	50	0	25	53,3			
0,5	89	87,8	83,4	81,2	80,2	74,7	76,2	71,5	68,9	33,3	0	0	0				
0,6	88	85,4	82,6	82,4	82,2	73	71,5	73	60,7	100	0	0					
0,7	85,9	79,7	81,8	78,4	77,2	77,6	70,6	76,9	66,7	0	0						
0,8	89,2	83,8	80,2	79,9	74,7	75,4	71,6	100	0	0							
0,9	66,7	80,1	74,9	78,2	72,7	69,9	0	0	0								
1	100	85,3	78,2	74,4	70,6	25	0	0	0								
1,1	0	78,9	68,9	63,2	0	0	0	0									
1,2	0	50	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 6. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = 0,9$

Φ/Ψ	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,8	100															
-1,6	70,4	20,4	100														
-1,5	100	21,2	62,4	100													
-1,4	100	98,8	4	93,2	100												
-1,3	100	100	83,6	12,4	100	100											
-1,2	100	100	100	44,8	39,2	100	100										
-1,1	100	100	100	95,2	20,8	76	100	100									
-1	100	100	100	100	72,4	27,6	94	100	100								
-0,9	100	100	100	100	96,8	42	52,8	99,2	100								
-0,8	100	100	100	100	100	82	36	80,4	100	99,6							
-0,7	100	100	100	100	100	96,8	54,4	52,4	94	100	99,6						
-0,6	100	100	100	100	100	100	81,6	49,2	73,2	99,2	99,6	100					
-0,5	100	100	100	100	100	100	94,8	68	57,2	96,8	99,6	100	100				
-0,4	100	100	100	100	100	100	96,8	81,2	58,4	90,8	98	100	100	100			
-0,3	100	100	100	100	100	100	96,4	91,2	70,8	84,8	95,2	95,6	99,2	100	100		
-0,2	100	100	100	100	100	100	99,6	95,2	86	81,6	76,8	89,6	96,4	99,6	100	100	
-0,1	100	100	100	100	100	100	99,6	94	84,4	83,2	77,2	86,4	94,8	98,8	100	100	100
0,1	100	100	100	100	100	97,2	84	67,6	62	80,4	82,8	89,6	94	96,8	98,8	98	100
0,2	100	100	100	100	99,6	94	75,2	54	48	82,8	80,4	87,2	87,6	92	95,6	98,4	
0,3	100	100	100	100	98	86	58,4	39,2	32,8	74,8	78	82	82,8	89,2	97,6		
0,4	100	100	100	99,6	92,4	70,8	42	24	25,6	68,4	75,6	77,2	78,4	86			
0,5	100	100	99,6	92,4	79,6	50,4	27,6	19,6	22	68,8	72,8	73,2	74				
0,6	100	98	88,4	76,8	54	31,2	19,2	17,2	30	67,2	75,6	71,2					
0,7	60,8	56,8	49,6	42	28,8	20,8	15,6	23,6	34,8	70,4	72,8						
0,8	1,2	6	10,4	16	16,4	15,6	17,2	29,2	40,4	77,2							
0,9	0	0,4	3,2	7,2	14	14,8	25,2	34,8	55,6								
1	0	0	1,2	6,8	13,6	29,2	46,4	59,2	66								
1,1	0	0	0,8	5,2	22	40	56,8	58,4									
1,2	0	0	0,4	3,2	18,8	36,8	44,4										
1,3	0	0	0	4,4	12,4	24											
1,4	0	0	0	1,6	8												
1,5	0	0	0	0,4													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 7. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = 0,8$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,8	100															
-1,6	70,4	20	100														
-1,5	100	21,2	62	100													
-1,4	100	98,8	4	93,2	100												
-1,3	100	100	83,6	12,4	100	100											
-1,2	100	100	100	44,8	39,2	100	100										
-1,1	100	100	100	95,2	20,8	76	100	99,6									
-1	100	100	100	100	72,4	27,2	94	100	100								
-0,9	100	100	100	100	96,8	42	52,8	99,2	100								
-0,8	100	100	100	100	100	82,4	36,4	80,4	100	100							
-0,7	100	100	100	100	100	96,8	55,2	52,4	93,6	100	99,6						
-0,6	100	100	100	100	100	100	82	49,2	73,6	99,6	99,6	100					
-0,5	100	100	100	100	100	100	95,2	68,4	57,2	97,2	98,8	99,2	100				
-0,4	100	100	100	100	100	100	96,8	82,4	59,6	90,8	97,6	99,6	100	100			
-0,3	100	100	100	100	100	100	96,8	90,8	70,8	84,4	95,2	98,4	100	99,6	100		
-0,2	100	100	100	100	100	99,6	95,2	86	81,6	76,8	90	97,6	98,4	99,6	98,8	99,6	
-0,1	100	100	100	100	100	99,6	94	84	82,4	76,4	86	92,8	97,6	99,2	99,6	99,6	100
0,1	100	100	100	100	100	100	97,2	84	66,4	61,6	79,6	81,2	86	90	94,8	98,8	99,6
0,2	100	100	100	100	99,6	94	75,6	54,4	47,6	82,4	79,6	80,8	86,8	85,2	98,8	99,6	
0,3	100	100	100	100	98	88	59,2	37,2	31,6	74,8	78	76	76,8	94,4	99,6		
0,4	100	100	100	100	92,4	72	44	25,6	26,8	72	76,4	72,4	83,6	96,4			
0,5	100	100	100	94,8	82,4	52,8	28,8	20,8	25,2	70	74	72,4	91,2				
0,6	100	98,4	90	78,8	59,2	37,6	22,8	22,4	36,8	75,6	73,6	83,6					
0,7	61,6	57,2	53,2	46,8	35,6	25,6	18,8	27,6	40,8	76,8	64,8						
0,8	1,2	6	15,2	21,6	23,2	22,8	27,2	36,8	51,6	56,8							
0,9	0	0,4	3,6	11,2	19,6	32,4	46,4	64	64,8								
1	0	0	1,2	9,6	26,4	46	63,6	62,4	52,8								
1,1	0	0	0,8	7,6	30	50	52,8	37,6									
1,2	0	0	0,4	7,6	19,2	30,4	16,8										
1,3	0	0	0	4,8	9,2	5,2											
1,4	0	0	0	0,4	0,4												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 8. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = 0,7$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,8	100															
-1,6	70,4	20	100														
-1,5	100	21,2	62	100													
-1,4	100	98,8	4	93,2	100												
-1,3	100	100	84	12,4	100	100											
-1,2	100	100	100	44,8	39,2	100	100										
-1,1	100	100	100	95,6	21,2	76	100	100									
-1	100	100	100	100	74,4	27,2	94	100	100								
-0,9	100	100	100	100	96,8	42	53,2	99,2	100								
-0,8	100	100	100	100	100	82,4	37,2	80	99,6	99,6							
-0,7	100	100	100	100	100	97,2	56	52	93,6	100	100						
-0,6	100	100	100	100	100	100	82,8	49,6	73,6	99,6	99,2						
-0,5	100	100	100	100	100	100	96	68,4	57,6	98	100	100					
-0,4	100	100	100	100	100	100	96,8	82,8	60,8	90,4	98	100	99,2				
-0,3	100	100	100	100	100	100	96,8	90,8	70,8	84,8	96	99,2	98,8	99,6	99,2		
-0,2	100	100	100	100	100	100	99,6	95,6	86	82	76,4	90,4	98	98,8	98	99,6	99,2
-0,1	100	100	100	100	100	100	99,6	94	84	81,6	76	84,8	92,4	97,6	99,2	98,4	100
0,1	100	100	100	100	100	100	97,2	84	64,8	60,4	80,4	77,6	83,2	88,4	97,2	100	100
0,2	100	100	100	100	99,6	94	74,4	53,6	46,8	80,8	78,8	75,6	88,8	98,8	98,8	99,6	100
0,3	100	100	100	100	98,4	90,4	60,8	36,4	32	76	76,8	71,6	88	98,4	100		
0,4	100	100	100	100	94	76	45,6	27,2	28,8	74,4	70,8	73,6	90,4	98			
0,5	100	100	100	96	85,2	60	30,8	24	33,6	74	75,2	86	90,8				
0,6	100	98,4	92,4	83,2	65,2	43,6	29,6	29,2	40,8	74	69,2	66,8					
0,7	63,6	64,8	59,6	54,8	48,4	39,2	34	44,4	52	60,4	50,4						
0,8	1,6	7,2	20,8	30,8	40,4	45,2	54,4	66	66,8	49,2							
0,9	0	0,4	6,8	20,8	39,6	60,8	72	68	48,8								
1	0	0	4,4	17,6	45,2	60,4	56,8	36,8									
1,1	0	0	2	20	38,8	43,6	24	20,4									
1,2	0	0	0,4	9,2	15,6	10,8	8,8										
1,3	0	0	0	2	2,4	0,8											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 9. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = 0,6$

$\Phi \setminus \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,8	100															
-1,6	70,4	20	100														
-1,5	100	21,6	62	100													
-1,4	100	98,8	4	93,2	100												
-1,3	100	100	84,4	12	100	100											
-1,2	100	100	100	46,4	38,4	100	100										
-1,1	100	100	100	95,6	22	76	100	100									
-1	100	100	100	100	74,8	27,2	94	99,6	100								
-0,9	100	100	100	100	97,2	42,8	52,4	99,6	99,2								
-0,8	100	100	100	100	100	82,4	36,8	79,6	99,6	100							
-0,7	100	100	100	100	100	97,6	56,4	52	93,2	99,2	99,6						
-0,6	100	100	100	100	100	100	83,2	50,8	72,4	99,2	100	100					
-0,5	100	100	100	100	100	100	96,4	68,8	57,2	98	98	99,6	99,2				
-0,4	100	100	100	100	100	100	96,8	83,2	61,6	88,4	97,6	99,2	100	100			
-0,3	100	100	100	100	100	100	96,8	90	72	83,6	96,4	98	98,8	99,2	100		
-0,2	100	100	100	100	100	99,6	95,6	86	81,6	74,4	89,6	97,2	98,8	98,8	100	99,6	
-0,1	100	100	100	100	100	100	99,6	94	83,6	81,6	76,8	85,6	92	97,2	98,4	99,2	100
0,1	100	100	100	100	100	97,2	84,4	63,6	59,6	78,8	74	76,8	94	100	100	100	100
0,2	100	100	100	100	100	94,8	76	51,6	46,8	76,4	71,6	75,2	94	99,2	100	100	
0,3	100	100	100	100	99,6	91,2	63,2	39,2	35,6	76,8	72,8	75,6	94,4	99,2	100		
0,4	100	100	100	100	95,2	83,2	50,4	32,8	35,2	77,2	75,2	83,6	95,2	96,8			
0,5	100	100	100	97,6	89,2	67,2	45,2	35,6	44,4	78,4	71,6	75,6	77,6				
0,6	100	98,8	96,8	88,8	78,4	60,8	48,8	45,6	54,8	63,6	50	52,8					
0,7	66,4	69,6	71,2	69,6	66,4	65,2	66,4	74	70,4	44	37,6						
0,8	2,4	13,6	32	51,2	68,8	81,2	77,6	68,4	49,2	33,2							
0,9	0	2,4	14,4	40,8	70,4	74,4	67,2	45,2	28								
1	0	0,4	10	36,4	59,2	57,6	39,6	14,4	16								
1,1	0	0	5,6	26,8	32	26,4	5,2	7,2									
1,2	0	0	0,8	8	8,4	1,6	0,8										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 10. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = 0,5$

$\Phi \setminus \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,8	100															
-1,6	70,4	20	100														
-1,5	100	22	62	100													
-1,4	100	99,2	4	93,2	100												
-1,3	100	100	84,8	12	100	100											
-1,2	100	100	100	46,8	38,4	100	100										
-1,1	100	100	100	95,6	22,8	76	100	100									
-1	100	100	100	100	75,2	26,8	94	100	100								
-0,9	100	100	100	100	97,6	44,4	52	99,6	99,6								
-0,8	100	100	100	100	100	83,2	36,8	79,6	100	100							
-0,7	100	100	100	100	100	97,6	59,2	51,2	92,4	99,2	100						
-0,6	100	100	100	100	100	100	84,4	50,4	70,8	99,6	99,6						
-0,5	100	100	100	100	100	100	96	69,6	57,6	97,6	98,4	99,6	100				
-0,4	100	100	100	100	100	100	96,8	84,8	62,8	90,8	98	98,4	99,2	99,6			
-0,3	100	100	100	100	100	100	96,8	89,6	72	84	94,4	98,8	99,6	98,4	100		
-0,2	100	100	100	100	100	100	95,6	86,4	82,8	74	90	97,2	98,8	100	100	100	
-0,1	100	100	100	100	100	99,6	94,4	83,2	81,6	74,4	82	93,2	96	100	100	100	100
0,1	100	100	100	100	100	98,4	86,4	62,8	57,6	76	70,4	84,8	96,4	100	100	100	100
0,2	100	100	100	100	100	95,2	77,6	51,6	47,6	73,2	70,4	82,4	96	100	100	100	
0,3	100	100	100	100	99,6	92,8	66,8	43,2	40,8	75,6	75,6	86,4	96,4	99,6	100		
0,4	100	100	100	100	98	90	63,2	42	46,4	75,2	75,6	79,2	87,2	94,8			
0,5	100	100	100	98,8	94,8	84,8	64,4	57,6	58,8	63,2	52	54,4	66				
0,6	100	100	98,4	95,2	92	85,2	78,8	79,2	72,8	40,4	34,8						
0,7	72,8	76,8	82,4	85,6	88,8	91,6	84,8	71,2	55,6	25,2	19,6						
0,8	4	21,2	52	77,6	88	86,8	74,4	55,6	26	14,4							
0,9	0	4,8	29,2	66,4	80,4	70,8	56	18,4	11,6								
1	0	1,2	18,4	51,2	58,4	47,6	14	4,8	2,4								
1,1	0	0,8	9,6	26,8	24,4	10,4	0,8	0									
1,2	0	0	0,4	5,2	1,6	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 11. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = 0,4$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,8	100															
-1,6	71,2	19,6	100														
-1,5	100	22	61,6	100													
-1,4	100	99,2	4,4	92,8	100												
-1,3	100	100	86,8	11,2	100	100											
-1,2	100	100	100	48,8	38,4	100	100										
-1,1	100	100	100	96,8	23,2	76	100	100									
-1	100	100	100	100	76,8	26,4	93,2	100	100								
-0,9	100	100	100	100	97,6	45,2	50,8	99,6	100								
-0,8	100	100	100	100	100	84,4	38,4	78,8	99,6	100							
-0,7	100	100	100	100	100	98	60,4	50,4	92,4	100	100						
-0,6	100	100	100	100	100	100	86,8	52	68,8	99,6	98,8	100					
-0,5	100	100	100	100	100	100	96	74	58,4	96,8	100	99,2	99,6				
-0,4	100	100	100	100	100	100	96,4	87,6	64	91,2	97,6	99,6	99,6	100			
-0,3	100	100	100	100	100	100	97,2	89,2	73,6	82	95,6	98,4	98,8	99,6	100		
-0,2	100	100	100	100	100	100	95,2	86,4	82,8	75,2	87,2	96,8	100	100	100	100	
-0,1	100	100	100	100	100	99,6	94,8	80,8	78,8	74,4	76,8	92,8	99,6	100	100	100	100
0,1	100	100	100	100	100	99,2	88,8	59,6	56,4	72,8	69,6	88,8	98,4	100	100	100	100
0,2	100	100	100	100	100	97,2	83,6	52,4	48,8	73,2	72,4	86,8	98	100	100	100	
0,3	100	100	100	100	99,6	96,4	78,8	52,4	47,2	73,6	77,2	83,2	92	96,8	99,6		
0,4	100	100	100	100	99,6	96	84	64,8	63,6	64,8	58,4	61,2	71,2	85,2			
0,5	100	100	100	99,6	99,2	96	90,4	82,4	74,4	35,6	31,6	35,6	46				
0,6	100	100	98,8	98,4	98	96,8	90,4	75,2	61,6	20,4	16,4	17,2					
0,7	78,8	86,4	92,4	96,4	97,2	96,8	83,2	65,2	32,4	10,4	8						
0,8	6,4	36	73,6	90,4	95,2	88,8	68,4	31,2	10	3,2							
0,9	0,4	9,6	50	80,8	80,4	66,4	35,6	5,2	2,4								
1	0	3,6	30,4	57,2	53,2	28,4	2,8	0	0								
1,1	0	1,6	14	24,8	13,2	0,8	0	0									
1,2	0	0	0,4	0,8	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 12. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = 0,3$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,8	100															
-1,6	72,4	18,8	100														
-1,5	100	23,2	60,4	100													
-1,4	100	99,2	4,8	92,8	100												
-1,3	100	100	88,8	11,2	100	100											
-1,2	100	100	100	52,8	37,6	100	100										
-1,1	100	100	100	100	97,2	24	73,6	100	100								
-1	100	100	100	100	77,2	26,4	93,2	100	100								
-0,9	100	100	100	100	98	50,8	51,2	99,2	100								
-0,8	100	100	100	100	100	86,4	37,6	78	99,2	100							
-0,7	100	100	100	100	100	98	62,8	49,2	92	100	100						
-0,6	100	100	100	100	100	100	88,4	54,8	98,8	99,6	99,6						
-0,5	100	100	100	100	100	100	96	76,4	58,8	95,6	99,6	99,2	98,8				
-0,4	100	100	100	100	100	100	96,8	87,6	66,4	90,8	98	98,4	99,6	99,6			
-0,3	100	100	100	100	100	100	97,2	88,8	76	79,6	95,6	98,8	99,6	100	100		
-0,2	100	100	100	100	100	100	96	86,8	83,6	72,8	89,6	98	99,6	100	100	100	
-0,1	100	100	100	100	100	100	95,6	80,8	75,6	70,8	80	96	99,6	100	100	100	100
0,1	100	100	100	100	100	100	92	62,4	56,8	73,6	73,6	90	99,2	100	100	100	100
0,2	100	100	100	100	100	99,2	90,4	64	54	74,8	78	87,6	96	99,6	100	100	
0,3	100	100	100	100	99,6	99,6	91,2	74,8	65,6	61,6	66,8	80	92,8	97,6			
0,4	100	100	100	100	99,6	98,8	92,4	85,2	74,8	35,2	30,4	35,6	50,8	67,6			
0,5	100	100	100	100	99,6	99,6	93,2	78	68	18,4	14,8	15,6	24				
0,6	100	100	100	99,6	99,6	98,4	90	69,2	41,6	8,4	4,4	5,6					
0,7	83,6	93,2	97,2	99,6	99,6	96,8	79,2	48,4	13,6	1,2	0,4						
0,8	9,2	56	86,8	96,8	96	85,2	57,2	14,4	4	0							
0,9	0,8	18	69,2	85,2	79,2	55,6	15,2	1,2	0								
1	0	10	42,4	55,2	42	13,6	0	0									
1,1	0	2,8	15,2	16,4	4,8	0	0										
1,2	0	0	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 13. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = 0,2$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,8	100															
-1,6	73,2	18,4	100														
-1,5	100	24,4	59,2	100													
-1,4	100	99,6	6	92,4	100												
-1,3	100	100	89,6	12	99,6	100											
-1,2	100	100	100	56,4	35,6	100	100										
-1,1	100	100	100	97,2	25,2	72	100	99,6									
-1	100	100	100	100	81,2	25,2	93,2	99,2	100								
-0,9	100	100	100	100	98,4	53,2	50	98,8	99,6								
-0,8	100	100	100	100	100	87,6	39,2	75,2	99,2	99,6							
-0,7	100	100	100	100	100	98,8	66,8	51,2	91,2	99,6	99,6						
-0,6	100	100	100	100	100	100	89,2	56,4	63,6	99,6	99,6	100					
-0,5	100	100	100	100	100	100	96,4	78	60	97,6	98,4	99,2	100				
-0,4	100	100	100	100	100	100	96,8	89,6	70,8	89,2	96,4	99,2	100	100			
-0,3	100	100	100	100	100	100	97,6	86	78	76,8	95,6	98,8	100	100	100		
-0,2	100	100	100	100	100	100	96,8	86	80,4	71,6	88	99,6	99,6	100	100	100	
-0,1	100	100	100	100	100	100	97,6	78,8	71,6	61,6	81,6	95,6	99,6	100	100	100	100
0,1	100	100	100	100	100	99,6	94,4	70,4	60	71,2	77,2	90	96,8	100	100	100	100
0,2	100	100	100	100	100	99,6	95,2	78,8	71,6	67,2	68,8	73,2	88	96,4	99,6	100	
0,3	100	100	100	100	99,6	99,6	95,2	86,8	79,2	38,8	29,2	37,2	58,4	76	92,4		
0,4	100	100	100	100	99,6	99,2	93,2	80,8	67,6	17,6	13,2	15,2	24	42,4			
0,5	100	100	100	100	100	98,8	92,8	73,2	52	8	3,2	4	8,8				
0,6	100	100	100	100	99,6	99,2	89,6	62,8	26,4	0,8	0	0,4					
0,7	86,8	96,8	99,2	99,6	99,6	96,4	73,6	30,8	5,2	0	0						
0,8	13,6	73,6	94,8	98,4	95,2	80	44	5,2	0,4	0							
0,9	1,6	32,4	80,4	86	75,2	43,6	6,8	0	0								
1	0	15,2	50,8	53,6	30,4	3,6	0	0	0								
1,1	0	2,8	14,4	10	1,2	0	0	0									
1,2	0	0	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 14. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = 0,1$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,8	100															
-1,6	74,8	17,2	100														
-1,5	100	28	56,8	100													
-1,4	100	99,6	7,6	92,4	100												
-1,3	100	100	90,4	10,8	99,6	100											
-1,2	100	100	100	62	34	100	100										
-1,1	100	100	100	98	28,8	68,8	100	100									
-1	100	100	100	100	84,4	25,6	92,8	98,8	100								
-0,9	100	100	100	100	99,2	58	48,8	97,6	100								
-0,8	100	100	100	100	100	92	42,8	73,2	99,2	99,6							
-0,7	100	100	100	100	100	99,6	71,2	51,2	90,4	100	99,6						
-0,6	100	100	100	100	100	100	91,6	59,6	64,4	98,4	98,8	99,6					
-0,5	100	100	100	100	100	100	96,8	80	64,4	96,4	98,4	100	99,6				
-0,4	100	100	100	100	100	100	97,6	89,6	72,8	87,6	97,6	99,6	99,6	100			
-0,3	100	100	100	100	100	100	97,6	87,2	80,4	80	94,8	98,8	99,6	100	100		
-0,2	100	100	100	100	100	100	98,4	82,8	73,6	70,8	87,2	98,8	100	100	100	100	
-0,1	100	100	100	100	100	100	97,2	75,2	67,2	69,6	80	94,8	99,6	100	100	100	100
0,1	100	100	100	100	100	99,6	97,2	82,8	74,4	68	68,4	80,4	91,2	98	100	100	100
0,2	100	100	100	100	100	99,6	94,8	86	78	45,2	32,4	42,4	63,2	86,4	96	100	
0,3	100	100	100	100	100	99,2	92,8	81,2	67,6	18,8	10,8	14,8	26	51,2	75,2		
0,4	100	100	100	100	100	98,8	93,6	76	61,6	9,2	2,8	3,6	9,2	19,2			
0,5	100	100	100	100	100	99,2	91,6	69,2	40,4	1,6	0	0	1,6				
0,6	100	100	100	100	100	98,4	87,2	54	12,8	0	0	0					
0,7	92	98,4	95,6	99,6	99,6	96	70	21,2	2,8	0	0						
0,8	20,4	80	96,8	98,8	94,8	78	31,2	2	0	0							
0,9	2,8	45,2	86,8	86,4	71,6	33,2	1,6	0	0								
1	0	18,8	53,2	47,2	23,2	1,2	0	0	0								
1,1	0	4,4	13,2	7,2	0	0	0	0									
1,2	0	0	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 15. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = -0,1$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,4	100															
-1,6	80,8	13,6	100														
-1,5	100	38	48,4	100													
-1,4	100	100	10,4	86,8	100												
-1,3	100	100	94,8	9,6	97,2	100											
-1,2	100	100	100	74,8	28,4	100	100										
-1,1	100	100	100	100	42,8	58,4	100	98,4									
-1	100	100	100	100	94	28,8	88	99,2	99,6								
-0,9	100	100	100	100	100	74,8	40,8	93,2	99,2								
-0,8	100	100	100	100	100	97,6	54,8	64,4	96,4	100							
-0,7	100	100	100	100	100	100	86,8	50,4	83,2	98,8	100						
-0,6	100	100	100	100	100	100	96,8	77,2	67,2	98	99,6	100					
-0,5	100	100	100	100	100	100	98	89,2	72	96,8	98,4	99,6	100				
-0,4	100	100	100	100	100	100	99,2	86,8	79,2	83,6	97,6	99,2	100	100			
-0,3	100	100	100	100	100	100	97,6	82,8	72,8	74,8	91,2	98	100	100	100		
-0,2	100	100	100	100	100	100	97,6	90,4	70,4	67,6	83,2	97,2	99,6	100	100	100	
-0,1	100	100	100	100	100	99,2	94,8	86	78	69,2	75,6	89,6	97,6	100	100	100	100
0,1	100	100	100	100	99,6	98,4	88	77,6	68,8	34,8	14,8	16,8	34,4	67,2	90,8	100	100
0,2	100	100	100	100	99,6	98,4	87,6	72,4	66	17,6	4	4	8,4	19,6	53,2	84,8	
0,3	100	100	100	100	100	98,4	93,2	76,8	60,8	6,4	1,2	0,4	1,2	4,8	14,8		
0,4	100	100	100	100	100	99,6	95,6	78,8	47,2	2,4	0,8	0	0	0			
0,5	100	100	100	100	100	99,6	94,4	69,2	24	0	0	0	0				
0,6	100	100	100	100	100	98	86	41,2	4,8	0	0	0					
0,7	96	100	100	100	99,2	92,8	57,6	9,6	0	0	0						
0,8	33,2	89,2	98,8	98,8	93,2	64,8	15,2	0	0	0							
0,9	5,6	62,4	90	86,4	60	15,6	0,4	0	0								
1	0	24,4	56,8	38,4	9,6	0	0	0									
1,1	0	4,8	9,2	1,6	0	0	0										
1,2	0	0	0	0	0	0											
1,3	0	0	0	0	0												
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 16. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = -0,2$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0,4	100															
-1,6	84	11,6	100														
-1,5	100	44,4	45,2	100													
-1,4	100	100	18,4	81,6	100												
-1,3	100	100	97,2	8,4	95,6	99,6											
-1,2	100	100	100	84,8	24	100	99,6										
-1,1	100	100	100	100	57,6	52	98,8	100									
-1	100	100	100	100	97,6	34,8	81,6	98,4	100								
-0,9	100	100	100	100	100	84,8	39,6	91,2	98,4								
-0,8	100	100	100	100	100	99,6	68	59,6	95,2	100							
-0,7	100	100	100	100	100	100	93,2	61,2	76,8	98,8	100						
-0,6	100	100	100	100	100	100	97,6	80,4	69,6	98	99,2	99,6					
-0,5	100	100	100	100	100	100	99,6	98,4	87,2	74,4	94,4	97,6	99,6	100			
-0,4	100	100	100	100	100	100	100	96,8	85,2	77,6	78,8	95,6	98,8	100	100		
-0,3	100	100	100	100	100	100	99,2	94,8	90	73,2	71,6	86,4	98	99,6	100	100	
-0,2	100	100	100	100	100	100	98,8	91,6	86,8	79,6	70	80,4	91,6	98,8	100	100	
-0,1	100	100	100	100	100	100	98	88	77,2	67,2	54,4	57,6	65,2	87,2	98,8	100	100
0,1	100	100	100	100	99,6	98	85,2	66,8	62,4	29,6	7,2	4	9,6	24,4	65,2	92,4	100
0,2	100	100	100	100	99,6	98,4	90,4	69,6	62	12,8	2,4	1,6	1,2	5,6	16,4	50	
0,3	100	100	100	100	100	98	94,8	79,2	59,2	5,2	0,8	0	0	0	3,2		
0,4	100	100	100	100	100	99,6	95,6	80,4	42,8	1,6	0	0	0				
0,5	100	100	100	100	100	100	95,2	67,2	18,8	0	0	0					
0,6	100	100	100	100	100	98	84,8	36	2,8	0	0						
0,7	96,8	100	100	100	99,6	92	52,8	6,4	0	0	0						
0,8	38	92,8	99,6	98,8	91,6	60	10,8	0	0	0							
0,9	6	68,4	91,2	86	54,8	13,6	0	0									
1	0,8	27,6	56,4	35,2	8	0	0	0									
1,1	0	5,6	8	0,8	0	0	0										
1,2	0	0	0	0	0	0											
1,3	0	0	0	0	0												
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 17. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = -0,3$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0	100															
-1,6	90,8	8,8	100														
-1,5	100	55,6	34,4	100													
-1,4	100	100	26,8	72,4	100												
-1,3	100	100	99,2	13,6	93,6	100											
-1,2	100	100	100	92	18,4	98,4	100										
-1,1	100	100	100	100	74	43,2	96,8	99,2									
-1	100	100	100	100	100	51,6	68,8	98,4	99,6								
-0,9	100	100	100	100	100	100	96,4	45,2	86,8	99,2							
-0,8	100	100	100	100	100	100	81,2	63,6	96	98,8							
-0,7	100	100	100	100	100	100	96,4	76,4	76	98	100						
-0,6	100	100	100	100	100	99,6	98	86	72,8	96,4	98,8	100					
-0,5	100	100	100	100	100	99,2	96,4	88	79,2	89,2	97,2	99,2	100				
-0,4	100	100	100	100	100	98,4	92,4	89,6	73,6	72,4	89,2	98	99,6	100			
-0,3	100	100	100	100	100	96	87,2	82,8	78,8	71,2	83,2	94	98,8	100	100		
-0,2	100	100	100	100	100	96	77,2	68,4	66,8	59,6	64	76,8	91,6	100	100	100	
-0,1	100	100	100	100	99,6	97,2	81,2	57,6	54,8	46,4	32	27,2	49,2	84	98,8	100	100
0,1	100	100	100	100	99,6	98,4	83,2	63,6	58,4	24	4,4	1,6	1,6	6,4	20,8	64	94
0,2	100	100	100	100	98,4	92,8	73,6	60,4	10,8	2,4	0,4	0	0	0	2,8	13,6	
0,3	100	100	100	100	100	99,2	95,2	82,8	60	4,8	0,4	0	0	0	0		
0,4	100	100	100	100	100	100	96,4	82,4	43,2	0,8	0	0	0	0			
0,5	100	100	100	100	100	100	95,6	67,6	17,6	0	0	0	0				
0,6	100	100	100	100	100	98	82,8	31,6	2	0	0	0					
0,7	97,6	100	100	100	99,6	91,2	48	3,2	0	0	0						
0,8	41,6	95,2	99,6	99,2	91,6	55,6	7,2	0	0	0							
0,9	7,6	71,2	90,8	85,6	50,4	10	0	0	0								
1	1,2	29,2	55,6	33,6	5,6	0	0	0									
1,1	0	5,6	7,6	0,4	0	0	0	0									
1,2	0	0	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 18. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = -0,4$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0	100															
-1,6	94,8	4,4	100														
-1,5	100	75,2	25,2	100													
-1,4	100	100	47,6	57,2	100												
-1,3	100	100	100	28,8	86,4	99,6											
-1,2	100	100	100	98,4	19,2	94	98,4										
-1,1	100	100	100	100	88,4	31,6	98	99,6									
-1	100	100	100	100	100	75,2	58	97,2	100								
-0,9	100	100	100	100	100	99,6	63,6	76,8	96,8								
-0,8	100	100	100	100	100	100	95,2	66	88,8	98,8							
-0,7	100	100	100	100	100	100	99,6	98	83,6	70,8	97,6	99,6					
-0,6	100	100	100	100	100	100	98,8	96	87,2	75,6	93,6	98	99,6				
-0,5	100	100	100	100	99,2	93,6	92,4	90,8	75,2	77,2	93,2	98	100				
-0,4	100	100	100	100	99,2	91,6	81,2	78,4	78,8	74,8	83,2	96,8	98,8	100			
-0,3	100	100	100	100	100	100	90,8	70,4	58,8	63,2	60	69,2	84,8	96,4	100	100	
-0,2	100	100	100	100	100	100	93,2	69,2	50	55,6	50	41,6	39,2	60	91,6	100	100
-0,1	100	100	100	100	99,6	94,4	72,8	46,8	47,6	44,4	24,4	8,4	12,8	40	85,2	100	100
0,1	100	100	100	100	99,6	98,4	83,2	63,2	59,2	22	5,2	1,2	0,4	0	3,2	18,4	64,4
0,2	100	100	100	100	100	98	93,2	78	62,4	10,4	2,4	0	0	0	0	1,2	
0,3	100	100	100	100	100	100	99,6	96,8	85,2	59,2	3,2	0	0	0	0		
0,4	100	100	100	100	100	100	100	96,8	83,6	39,6	0,4	0	0	0			
0,5	100	100	100	100	100	100	96	65,2	16,4	0	0	0	0				
0,6	100	100	100	100	100	98	82,4	26	1,6	0	0	0					
0,7	98,4	100	100	100	99,6	90,4	46	2,8	0	0	0						
0,8	46,8	95,6	100	99,2	91,2	52,8	4,4	0	0	0							
0,9	8,4	74,4	91,2	85,6	47,6	6,8	0	0	0								
1	1,6	31,6	54,4	32,4	4,4	0	0	0									
1,1	0	5,6	7,6	0	0	0	0	0									
1,2	0	0	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 19. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = -0,5$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0	100															
-1,6	98	1,6	100														
-1,5	100	91,2	14	99,6													
-1,4	100	100	74,8	37,2	99,6												
-1,3	100	100	100	60,4	62,4	99,6											
-1,2	100	100	100	100	39,2	86,8	99,6										
-1,1	100	100	100	100	98,4	39,2	93,2	98,8									
-1	100	100	100	100	100	94,8	51,2	94,8	99,2								
-0,9	100	100	100	100	100	100	84,8	70,4	95,6								
-0,8	100	100	100	100	99,6	99,2	97,6	79,2	80,8	98							
-0,7	100	100	100	100	100	97,2	94,4	84,4	75,6	95,6	99,2						
-0,6	100	100	100	100	97,2	89,2	89,2	87,6	78	82,8	95,6	99,2					
-0,5	100	100	100	100	97,6	84	74,4	73,6	78,8	74,4	85,6	97,2	99,6				
-0,4	100	100	100	100	98,4	83,2	60	53,6	62,4	62,4	73,6	88,4	98,4	100			
-0,3	100	100	100	100	99,6	85,2	60	46,8	53,2	55,6	44,8	47,2	72,4	97,2	100		
-0,2	100	100	100	100	98,8	89,6	63,2	40,8	48,8	52,4	30	16	16,4	50,4	94,4	100	
-0,1	100	100	100	100	99,6	94	68,4	43,6	43,6	46,4	18,4	4,8	2,8	8,4	33,2	89,6	100
0,1	100	100	100	100	99,6	98,4	85,2	66	57,2	20	5,2	0,8	0	0	0	2	16
0,2	100	100	100	100	100	98	94	82,4	65,6	8,8	0,8	0	0	0	0	0	
0,3	100	100	100	100	100	99,6	98,4	87,6	58	2	0	0	0	0	0	0	
0,4	100	100	100	100	100	100	97,2	84	38,8	0	0	0	0	0	0		
0,5	100	100	100	100	100	100	95,2	64	15,2	0	0	0	0				
0,6	100	100	100	100	100	98	81,2	24,8	1,6	0	0	0					
0,7	98,4	100	100	100	99,6	89,6	44	2,4	0	0	0						
0,8	47,2	96	100	99,2	90	51,2	3,6	0	0	0							
0,9	10,4	75,6	92	84,8	46,4	5,6	0	0	0								
1	1,6	32,4	53,6	30,4	3,2	0	0	0	0								
1,1	0	5,6	6,4	0	0	0	0	0									
1,2	0	0	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 20. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = -0,6$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0	100															
-1,6	99,6	0,8	100														
-1,5	100	98	4,4	99,2													
-1,4	100	100	96	15,6	98												
-1,3	100	100	100	90	33,6	98,8											
-1,2	100	100	100	100	80,4	60	98,4										
-1,1	100	100	100	100	100	71,2	76,8	99,2									
-1	100	100	100	100	100	100	70	88,8	98								
-0,9	100	100	100	100	99,6	99,2	96,4	74	90,8								
-0,8	100	100	100	99,6	98,8	98	94,4	84,8	73,6	97,2							
-0,7	100	100	100	99,6	95,2	87,6	88,8	88,8	78,4	90	98,4						
-0,6	100	100	100	100	94	74	66	72,4	78,4	75,6	88,4	98					
-0,5	100	100	100	100	95,2	72,8	50	54,8	67,6	64,8	78,8	90,4	98,8				
-0,4	100	100	100	100	96,8	73,2	44,4	41,2	57,2	63,6	51,6	57,6	83,2	98,8			
-0,3	100	100	100	100	97,6	80	48,8	40	50	56,4	36	26,4	24	66,4	99,2		
-0,2	100	100	100	100	98,4	86,8	58,4	36,4	44	54	28	8	4,4	10	49,6	98,4	
-0,1	100	100	100	100	99,6	93,2	67,2	40,4	40,4	46,4	17,6	5,2	1,6	1,2	5,6	34,4	96,4
0,1	100	100	100	100	99,6	97,6	86,8	67,6	56,4	17,6	3,2	0	0	0	0	0	0,8
0,2	100	100	100	100	100	98,8	93,6	84,4	67,2	7,6	0,4	0	0	0	0	0	
0,3	100	100	100	100	100	100	98,8	88	58,4	1,2	0	0	0	0	0	0	
0,4	100	100	100	100	100	100	97,6	84,4	38	0	0	0	0	0			
0,5	100	100	100	100	100	100	94,8	62,8	14,4	0	0	0	0				
0,6	100	100	100	100	100	100	98,4	80,4	22,8	0,8	0	0					
0,7	98,4	100	100	100	99,6	88,8	42,8	2	0	0	0						
0,8	49,2	96,8	100	99,2	90	48,8	3,2	0	0	0							
0,9	11,6	77,2	92	84,8	45,6	5,2	0	0	0								
1	2,4	34	53,2	30	3,2	0	0	0	0								
1,1	0	5,6	6,4	0	0	0	0	0									
1,2	0	0	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 21. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = -0,7$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	100																
-1,7	0	100															
-1,6	100	2,8	100														
-1,5	100	100	12	97,6													
-1,4	100	100	100	20,4	98												
-1,3	100	100	100	99,6	30	96											
-1,2	100	100	100	100	99,2	45,2	97,2										
-1,1	100	100	100	100	100	98	64	97,6									
-1	100	100	100	100	100	99,2	94,8	73,6	96								
-0,9	100	100	100	99,6	99,2	98,4	94,4	83,6	80								
-0,8	100	100	100	99,2	93,2	88,4	87,6	89,2	77,2	93,6							
-0,7	100	100	100	98,8	86,8	72	60,8	72	78	79,2	92,8						
-0,6	100	100	100	99,2	86	60	43,2	57,2	67,6	65,2	80,8	96,4					
-0,5	100	100	100	99,6	91,6	58,4	36	45,6	60,4	66,8	53,6	65,2	95,6				
-0,4	100	100	100	100	95,6	66	36,4	37,2	55,6	69,2	41,6	33,6	32,4	88,4			
-0,3	100	100	100	100	97,2	76,4	43,6	34,8	48	66	37,2	15,6	8	12,4	74,8		
-0,2	100	100	100	100	98,4	85,2	56	34,4	41,2	59,2	29,2	11,2	2,8	1,6	6,8	60,8	
-0,1	100	100	100	100	99,6	92,4	66	38	36,8	45,2	17,6	5,2	0,8	0,8	0,4	4,8	48,8
0,1	100	100	100	100	99,6	97,6	88	68,8	55,2	17,2	2,4	0	0	0	0	0	0
0,2	100	100	100	100	100	98,8	94,4	85,6	67,6	5,6	0	0	0	0	0	0	0
0,3	100	100	100	100	100	100	99,2	88,8	60,8	1,2	0	0	0	0	0	0	0
0,4	100	100	100	100	100	100	98	84,8	36,4	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	100	100	100	100	100	100	94,4	62,8	14	0	0	0	0	0	0	0	0
0,6	100	100	100	100	100	98,4	80,4	22,4	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0
0,7	98,4	100	100	100	99,6	88,8	41,2	1,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,8	50,4	96,8	100	99,2	89,6	48,8	3,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	11,6	78	91,6	84,4	43,6	4,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2,4	34,8	52,4	29,6	3,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,1	0	5,6	6,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 22. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = -0,8$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	99,6																
-1,7	0,4	88,4															
-1,6	100	23,2	75,6														
-1,5	100	100	54,8	72													
-1,4	100	100	100	72,4	73,6												
-1,3	100	100	100	100	80	76,8											
-1,2	100	100	100	100	80	85,6											
-1,1	100	100	100	100	100	99,2	81,2	86									
-1	100	100	100	100	100	99,2	95,6	77,2	85,6								
-0,9	100	100	100	99,6	94,4	90,4	90	89,6	75,6								
-0,8	100	100	100	98,8	84,8	71,6	66	72	82,4	78							
-0,7	100	100	100	97,6	78	54,4	47,2	59,2	71,6	68,8	83,6						
-0,6	100	100	100	99,2	79,6	46,4	37,2	50	64,8	66,4	53,6	74,8					
-0,5	100	100	100	99,2	89,2	50	32	44	62,4	78	46,8	36,4	48				
-0,4	100	100	100	100	94	62,8	33,2	33,6	56,4	76,8	48	21,6	12,8	23,6			
-0,3	100	100	100	100	97,2	75,6	38,8	31,6	46	71,6	41,2	16	5,2	2,4	11,2		
-0,2	100	100	100	100	98,4	84,8	54	31,6	40,8	60	33,2	10	0,8	0,8	0,4	5,6	
-0,1	100	100	100	100	99,6	92	64,4	35,6	35,6	47,2	17,2	5,2	0	0	0	0	3,2
0,1	100	100	100	100	100	97,6	88	69,6	55,6	17,2	1,2	0	0	0	0	0	0
0,2	100	100	100	100	100	98,8	94,8	86,8	67,6	5,2	0	0	0	0	0	0	0
0,3	100	100	100	100	100	100	99,6	89,6	61,6	1,2	0	0	0	0	0	0	0
0,4	100	100	100	100	100	100	98	84,4	36	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	100	100	100	100	100	100	94,4	62	13,2	0	0	0	0	0	0	0	0
0,6	100	100	100	100	100	98,4	79,6	21,6	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0
0,7	98,4	100	100	100	99,2	88,4	40,8	1,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,8	50,4	96,8	100	99,2	89,2	47,6	3,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	12	78	91,6	84,4	43,2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2,4	34,8	52	29,2	3,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,1	0	5,6	6,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 23. Procentowy udział min/max w ogólnej liczbie szeregów ARMA(2,1)

dla $\theta = -0,9$

$\phi \backslash \theta$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	93,2																
-1,7	6	37,2															
-1,6	100	56,8	17,6														
-1,5	100	100	89,2	18,8													
-1,4	100	100	100	97,6	38,8												
-1,3	100	100	100	100	99,2	56,4											
-1,2	100	100	100	100	100	98,8	71,2										
-1,1	100	100	100	100	99,6	97,6	94,8	76,4									
-1	100	100	100	100	100	97,2	94,4	92	88,4	74							
-0,9	100	100	100	98,8	86,8	78,4	74,8	80	85,6								
-0,8	100	100	100	97,2	76,4	57,6	53,2	64,4	76,4	65,2							
-0,7	100	100	100	96	73,6	42,4	40	53,6	68,8	74	52,8						
-0,6	100	100	100	98,8	78	37,6	35,6	49,2	66	77,6	54,4	38					
-0,5	100	100	100	99,2	88	48,8	28,8	42,8	60,8	82,8	60,4	28,8	15,6				
-0,4	100	100	100	100	93,2	60,8	30,4	33,6	56	80,8	58,4	28	10	3,6			
-0,3	100	100	100	100	97,2	74,4	37,2	30	44,8	75,2	50,8	18,4	4,8	0,4	0,8		
-0,2	100	100	100	100	98,4	84,4	52	29,6	39,6	62,8	36	10,8	1,2	0	0	0	
-0,1	100	100	100	100	99,6	91,6	64,4	34	36	47,2	18,4	5,2	0	0	0	0	0
0,1	100	100	100	100	100	97,6	88	69,6	56,4	16,8	1,2	0	0	0	0	0	0
0,2	100	100	100	100	100	98,8	95,2	86,8	68,8	5,2	0	0	0	0	0	0	0
0,3	100	100	100	100	100	100	100	100	89,6	61,6	1,2	0	0	0	0	0	
0,4	100	100	100	100	100	100	98	84,4	35,2	0	0	0	0	0			
0,5	100	100	100	100	100	100	94,4	61,6	13,2	0	0	0	0				
0,6	100	100	100	100	100	98	79,6	21,6	0,4	0	0	0					
0,7	98,4	100	100	100	99,2	88	40	1,2	0	0	0						
0,8	50,8	96,8	100	99,2	88,8	47,6	3,2	0	0	0							
0,9	12	78	91,2	84,4	43,2	4	0	0	0								
1	2,4	34,8	52	28,8	3,2	0	0	0	0								
1,1	0	5,6	6,4	0	0	0	0	0									
1,2	0	0	0	0	0	0	0										
1,3	0	0	0	0	0	0											
1,4	0	0	0	0	0												
1,5	0	0	0	0													
1,6	0	0	0														
1,7	0	0															
1,8	0																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 24. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = 0,9$

$\phi \backslash \theta$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	38,8																
-1,7	0	43,2															
-1,6	68,2	35,3	40														
-1,5	67,2	62,3	35,9	42,8													
-1,4	72	70	40	39,9	42,8												
-1,3	76,8	72,8	72,2	25,8	40,4	47,6											
-1,2	73,6	69,6	72	67	23,5	40,8	47,2										
-1,1	80	78	71,2	68,5	46,2	32,1	40,8	47,6									
-1	86	79,2	76,8	74	64,6	21,7	34	39,6	46								
-0,9	86,4	86	79,6	81,2	74,4	49,5	28,8	33,9	40,8								
-0,8	86,8	87,6	83,2	82	78,8	73,2	36,7	30,3	34	41,8							
-0,7	84,4	83,6	82,8	82	81,6	76	62,5	26	31,9	40	41,8						
-0,6	86	88,4	83,6	83,2	80,4	78,4	74	40,7	27,9	34,3	40,2	41,6					
-0,5	85,6	87,6	84,4	84,8	81,2	76,8	75,1	61,2	26,6	34,3	37,3	41,6	42,8				
-0,4	88,8	86,4	87,2	81,2	79,6	78	76	69	41,1	30,8	33,1	40	40,8	42,4			
-0,3	91,6	89,2	87,6	82,4	81,2	78,8	75,1	71,1	53,7	27,4	32,8	33,7	39,1	39,6	42,8		
-0,2	91,6	90,4	88,4	86,8	81,2	78,7	78,6	73	58,8	26,6	31,7	33,2	35,3	38	40	43,2	
-0,1	90,8	89,2	84,4	87,2	84	80,7	77	71,6	61,1	27,5	29,2	31,2	34,4	36	36,8	41,6	42,8
0,1	91,6	90	86	84	83,6	84	81,9	77,5	67,1	39,3	30,4	30,4	32,8	34,3	34	35,1	37,2
0,2	89,6	90,4	84	85,2	81,9	81,3	79,8	78,5	69,2	45,9	33,3	29,8	31,1	31,7	33,1	35	
0,3	92	92	88	84	84,5	80	77,4	76,5	70,7	48,1	37,9	27,8	31,4	30,5	33,6		
0,4	91,6	87,2	84,4	83,9	82,3	76,8	80	81,7	53,1	44,4	37	30,6	25,5	31,2			
0,5	89,6	89,2	86,3	85,3	78,4	75,4	79,7	65,3	38,2	41,9	35,2	34,4	27				
0,6	91,6	88,6	90	85,9	80	85,9	77,1	46,5	36	39,9	43,9	41					
0,7	92,1	90,8	82,3	81	86,1	86,5	71,8	42,4	33,3	44,3	48,4						
0,8	100	93,3	88,5	82,5	85,4	79,5	60,5	35,6	21,8	54,4							
0,9	--	100	75	61,1	74,3	75,7	58,7	36,8									
1	--	--	33,3	64,7	73,5	68,5	65,5	60,1	50,9								
1,1	--	--	50	76,9	67,3	73	64,1	52,1									
1,2	--	--	100	62,5	72,3	67,4	63,1										
1,3	--	--	--	63,6	77,4	63,3											
1,4	--	--	--	100	70												
1,5	--	--	--	100													
1,6	--	--	--														
1,7	--	--															
1,8	--																

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 25. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = 0,8$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	38,4																
-1,7	50	43,2															
-1,6	68,8	38	40,4														
-1,5	67,2	62,3	34,8	42,8													
-1,4	71,2	69,2	40	39,5	43,2												
-1,3	75,6	71,2	71,3	25,8	39,6	47,2											
-1,2	74,4	69,6	71,2	65,2	23,5	39,6	47,2										
-1,1	80	77,2	71,6	69,9	44,2	32,1	39,6	47,8									
-1	84,8	78,8	78,8	73,2	64,6	22,1	34,5	40	45,6								
-0,9	86,4	85,2	80,4	80,8	73,6	52,4	29,5	33,5	40,8								
-0,8	86,8	86	80	82,4	80,4	72,8	38,5	30,8	34,8	42,4							
-0,7	85,2	83,2	81,6	82,8	80,8	76,9	61,6	27,5	32,5	40	41,4						
-0,6	87,6	87,2	82,8	82,8	80,8	78	75,6	42,3	27,2	35,7	39,4	41,2					
-0,5	84	86	84	84	80,4	77,2	76,1	60,2	27,3	33,3	37,2	41,5	42,8				
-0,4	88,8	86,4	88,4	82,8	80,4	76,8	76	69,4	43,6	31,7	32,8	39	39,6	42,4			
-0,3	90,8	91,6	87,2	82,8	80,4	78,8	74,8	71,8	56,5	28	32,8	34,1	38	41,4	42,4		
-0,2	91,6	89,6	86,4	84,8	80,8	78,7	76,9	72,6	60,3	28,1	29,8	33,2	35	36,1	40,9	42,2	
-0,1	90,8	90	86	85,2	84,4	81,1	76,3	74,3	61,7	29,8	30,2	31	35,7	35,9	36,5	40,6	43,2
0,1	92,4	90	87,2	83,2	82,3	81	77,1	68,2	40,7	31,5	29,8	32,4	32,9	33,2	36,1	36	
0,2	89,6	89,6	84	84	83,5	79,1	79,9	77,2	70,6	46,6	33,7	27,7	29,5	33,6	34	36,1	
0,3	89,2	92	87,6	84,4	83,7	80,5	79,1	80,6	70,9	48,1	35,4	28,4	28,1	32,6	36,5		
0,4	89,6	88	86	86	81,8	77,8	81,8	79,7	56,7	45	35,1	30,9	28,2	30,3			
0,5	89,2	91,2	86	84,4	80,1	79,5	83,3	67,3	46	42,3	42,7	39,2	30,7				
0,6	92,4	90,7	88,9	84,3	84,5	88,3	71,9	53,6	35,9	47,6	44,6	39,2					
0,7	90,9	88,8	83,5	82,1	87,6	84,4	72,3	43,5	30,4	52,6	37						
0,8	100	86,7	84,2	85,2	77,6	80,7	60,3	42,4	38	31,7							
0,9	--	100	66,7	78,6	77,6	77,8	70,7	56,3	55,6								
1	--	--	33,3	66,7	77,3	73	67,3	57,1	36,4								
1,1	--	--	100	78,9	72	73,6	66,7	45,7									
1,2	--	--	100	57,9	79,2	68,4	52,4										
1,3	--	--	--	75	73,9	61,5											
1,4	--	--	--	100	100												
1,5	--	--	--	--	--												
1,6	--	--	--	--	--												
1,7	--	--	--	--	--												
1,8	--	--	--	--	--												

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 26. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = 0,7$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	38,4																
-1,7	50	43,2															
-1,6	68,8	38	41,2														
-1,5	66,8	64,2	35,5	42,4													
-1,4	70	68,8	40	39,1	44,4												
-1,3	76	71,2	70	25,8	39,2	47,6											
-1,2	75,2	69,6	70,4	60,7	24,5	40,4	47,2										
-1,1	80	76,4	72,4	68,6	45,3	32,1	39,6	47,2									
-1	84,4	80	80	72,4	65,6	23,5	33,6	39,6	45,2								
-0,9	87,2	85,2	81,6	80,4	74,8	53,3	30,1	34,7	39,2								
-0,8	86,8	86,4	80,4	82,8	80,8	74,3	43	33,5	36,5	41,8							
-0,7	86,8	82,8	82	82,4	80	75,7	62,1	26,9	33,8	40,8	40,4						
-0,6	88	89,2	83,2	83,2	79,2	76,8	75,4	41,9	27,7	35,7	38,7	41,8					
-0,5	84,8	87,2	84,8	82	81,2	77,2	75	60,8	28,5	33,9	36,7	39,6	41,6				
-0,4	90	87,2	86,8	83,2	81,2	78,4	74,8	70	44,1	33,2	33,9	37,6	40,4	41,9			
-0,3	91,6	91,6	86	83,2	81,6	80	76,4	70,9	56,5	30,2	32,5	34,3	38,5	40,6	41,9		
-0,2	92	88,8	87,6	86	81,2	79,1	77	73,5	59	28,8	30,1	35,1	35,6	37,6	41	42,7	
-0,1	90,8	88	87,2	86,4	83,6	82,7	77,9	74,3	60,3	32,1	32,1	32,5	35,7	35,9	36,6	39,6	42,8
0,1	90,4	90,8	87,6	85,2	82,4	81,9	80	78,4	70,2	44,3	30,9	31,7	29,9	32,1	33,6	34	34,8
0,2	93,6	89,2	88,4	87,6	84,7	80,4	78,5	79,9	70,9	47,5	31	26,5	30,2	32,8	32,5	34,4	
0,3	90,4	88,8	84,8	86	84,6	80,5	80,3	81,3	70	46,8	35,4	26,3	26,8	32,9	36		
0,4	87,2	90	87,6	85,2	84,3	80	79,8	76,5	56,9	44,1	38,4	33,2	27,9	29,8			
0,5	89,6	91,2	87,6	84,6	82,6	83,3	84,4	60	44	47	43,1	37,7	28,6				
0,6	91,2	91,9	88,3	85,6	86,5	88,1	73	53,4	39,2	52,4	41	26,9					
0,7	90,6	87,7	86,6	85,4	82,6	82,7	69,4	48,6	43,8	40,4	26,2						
0,8	100	86,9	86,5	84,4	79,2	77,9	69,1	55,2	55,7	26,8							
0,9	--	100	70,6	82,7	75,8	75,7	71,1	58,8	34,4								
1	--	--	63,6	79,5	77,9	76,2	71,8	48,9	39,1								
1,1	--	--	100	76	77,3	75,2	61,7	39,2									
1,2	--	--	100	73,9	79,5	63	54,5										
1,3	--	--	--	80	83,3	100											
1,4	--	--	--	--	--	--											
1,5	--	--	--	--	--	--											
1,6	--	--	--	--	--	--											
1,7	--	--	--	--	--	--											
1,8	--	--	--	--	--	--											

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 27. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = 0.6$

$\Phi \backslash \Psi$	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
-1.8	38.8																
-1.7	50	42.8															
-1.6	67.6	38	41.2														
-1.5	<u>67.2</u>	61.1	36.8	42.4													
-1.4	<u>70</u>	68.8	50	37.8	44.8												
-1.3	<u>76.8</u>	<u>70.4</u>	69.7	23.3	38.8	47.6											
-1.2	<u>75.2</u>	<u>70.4</u>	<u>68.4</u>	60.3	25	38.4	47.2										
-1.1	<u>80.4</u>	<u>76.8</u>	<u>71.6</u>	<u>69.6</u>	43.6	32.6	38.4	46.4									
-1	<u>84.8</u>	<u>81.2</u>	<u>81.2</u>	<u>74.4</u>	67.9	26.5	34	39.4	43.2								
-0.9	<u>86.4</u>	<u>86</u>	<u>81.2</u>	<u>81.2</u>	<u>74.9</u>	53.3	31.3	35.7	38.7								
-0.8	<u>85.2</u>	<u>86</u>	<u>81.2</u>	<u>83.2</u>	<u>80</u>	<u>74.3</u>	45.7	33.2	36.5	40.8							
-0.7	<u>86.4</u>	<u>83.6</u>	<u>83.2</u>	<u>82.8</u>	<u>78.4</u>	<u>76.2</u>	62.4	26.9	33	39.1	41.4						
-0.6	<u>88.8</u>	<u>89.2</u>	<u>83.2</u>	<u>84.4</u>	<u>79.6</u>	<u>76.8</u>	75.5	44.1	27.1	35.1	38.8	41.2					
-0.5	<u>86.4</u>	<u>85.6</u>	<u>85.2</u>	<u>81.2</u>	<u>78.8</u>	<u>78</u>	73.9	62.2	29.4	32.7	37.6	39.8	41.1				
-0.4	<u>89.2</u>	<u>89.6</u>	<u>86.8</u>	<u>83.2</u>	<u>80.8</u>	<u>77.2</u>	74	69.7	44.2	31.7	32.8	36.3	40.4	41.6			
-0.3	<u>91.6</u>	<u>92</u>	<u>87.2</u>	<u>84.4</u>	<u>79.6</u>	<u>77.2</u>	76	69.3	55	29.2	32	33.9	36.4	39.9	41.6		
-0.2	<u>91.2</u>	<u>88.8</u>	<u>87.6</u>	<u>83.6</u>	<u>83.2</u>	<u>81.9</u>	79.1	73.5	59.3	32.3	33.5	34.6	35.6	36.8	40.4	42.6	
-0.1	<u>91.6</u>	<u>87.6</u>	<u>86</u>	<u>86.4</u>	<u>84</u>	<u>83.5</u>	79.6	74.6	64.2	33.9	32.2	33	33.7	33.3	35.9	38.8	41.2
0	<u>92.4</u>	<u>90</u>	<u>87.6</u>	<u>85.6</u>	<u>83.6</u>	<u>81.5</u>	79.6	79.2	67.8	40.1	30.3	28.1	32.3	33.2	33.2	34	36
0.1	<u>94</u>	<u>88.8</u>	<u>89.2</u>	<u>86.8</u>	<u>84</u>	<u>79.7</u>	78.9	80.6	71.8	42.9	34.1	26.6	29.8	32.3	36	37.2	
0.2	<u>89.6</u>	<u>85.6</u>	<u>85.6</u>	<u>84.4</u>	<u>85.9</u>	<u>82.5</u>	79.7	77.6	65.2	45.3	39.6	29.6	27.1	29.8	33.6		
0.3	<u>86.8</u>	<u>89.6</u>	<u>87.2</u>	<u>84.4</u>	<u>83.2</u>	<u>83.2</u>	79.4	70.7	53.4	47.7	40.4	35.4	26.9	30.6			
0.4	<u>90.4</u>	<u>92</u>	<u>88</u>	<u>86.9</u>	<u>82.5</u>	<u>84.5</u>	77.9	58.4	43.2	50.5	42.5	29.6	29.4				
0.5	<u>88.8</u>	<u>90.3</u>	<u>90.1</u>	<u>85.1</u>	<u>84.7</u>	78.9	77	56.1	43.8	42.1	28	25					
0.6	<u>89.8</u>	<u>86.8</u>	<u>85.4</u>	<u>81.6</u>	80.1	78.5	75.3	61.6	52.8	29.1	25.5						
0.7	<u>100</u>	<u>88.2</u>	<u>83.8</u>	79.7	80.2	79.8	73.2	61.4	43.9	26.5							
0.8	--	50	83.3	82.4	77.8	77.4	76.2	54.9	42.9								
0.9	--	--	0	68	74.7	75.7	77.1	70.7	44.4	40							
1	--	--	--	64.3	71.6	73.8	72.7	61.5	50								
1.1	--	--	--	100	65	76.2	75	50									
1.2	--	--	--	--	--	--	--	--									
1.3	--	--	--	--	--	--	--	--									
1.4	--	--	--	--	--	--	--	--									
1.5	--	--	--	--	--	--	--	--									
1.6	--	--	--	--	--	--	--	--									
1.7	--	--	--	--	--	--	--	--									
1.8	--	--	--	--	--	--	--	--									

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 28. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = 0.5$

$\Phi \backslash \Psi$	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
-1.8	37.6																
-1.7	50	43.6															
-1.6	69.3	38	42														
-1.5	<u>67.2</u>	63.6	36.8	41.2													
-1.4	<u>70.8</u>	69.8	40	38.6	43.6												
-1.3	<u>76</u>	<u>68.8</u>	70.8	23.3	38	47.6											
-1.2	<u>77.2</u>	<u>70.8</u>	<u>70.8</u>	59.8	26	38.4	47.2										
-1.1	<u>81.6</u>	<u>76.4</u>	<u>72.4</u>	<u>67.4</u>	42.1	32.6	39.2	46									
-1	<u>85.2</u>	<u>81.6</u>	<u>81.2</u>	<u>74.8</u>	70.2	31.3	33.2	38.8	42.8								
-0.9	<u>86.8</u>	<u>87.2</u>	<u>80.8</u>	<u>83.2</u>	<u>74.6</u>	56.8	29.2	36.1	39								
-0.8	<u>84.8</u>	<u>84.8</u>	<u>82</u>	<u>82.8</u>	<u>79.2</u>	<u>74</u>	43.5	33.7	37.2	41.6							
-0.7	<u>87.6</u>	<u>83.6</u>	<u>82</u>	<u>81.2</u>	<u>78.4</u>	<u>76.6</u>	64.9	28.9	32	38.7	41.2						
-0.6	<u>88</u>	<u>87.2</u>	<u>81.6</u>	<u>82</u>	<u>78.8</u>	<u>76.8</u>	74.9	45.2	28.8	36.9	39	39.8					
-0.5	<u>87.2</u>	<u>85.6</u>	<u>84.8</u>	<u>82</u>	<u>78.8</u>	<u>77.6</u>	74.2	63.8	31.9	33.2	35.4	39	41.6				
-0.4	<u>90.4</u>	<u>90</u>	<u>86</u>	<u>82</u>	<u>78.4</u>	<u>78.4</u>	74.8	68.9	42	33	34.3	37	39.9	41.8			
-0.3	<u>91.6</u>	<u>91.6</u>	<u>88</u>	<u>85.2</u>	<u>80.4</u>	<u>79.2</u>	76.9	70.1	55	32.4	33.1	35.6	34.5	39.8	42		
-0.2	<u>90.4</u>	<u>87.6</u>	<u>85.2</u>	<u>85.6</u>	<u>85.2</u>	<u>80</u>	78.7	74.5	59.9	32.4	33.3	34.2	34	36	38.8	41.6	
-0.1	<u>91.2</u>	<u>88.8</u>	<u>86.8</u>	<u>86.8</u>	<u>84</u>	<u>82.7</u>	80.9	76.4	65.2	34.9	31.2	31.8	30.4	32	34.8	37.2	40.8
0	<u>92.4</u>	<u>90</u>	<u>88.8</u>	<u>86.8</u>	<u>84</u>	<u>81.3</u>	81.5	80.9	68.1	41.1	27.3	26.4	30.7	32.4	33.2	35.2	38.8
0.1	<u>94</u>	<u>90</u>	<u>86.8</u>	<u>86.8</u>	<u>85.2</u>	<u>81.1</u>	79.9	79.8	68.9	44.8	37.5	29.1	28.3	28.4	34.8	36.8	
0.2	<u>88.4</u>	<u>84.4</u>	<u>84.8</u>	<u>84</u>	<u>83.5</u>	<u>83.6</u>	80.8	75.9	60.8	48.7	37.6	31.9	25.7	30.1	34.4		
0.3	<u>88.4</u>	<u>90.4</u>	<u>86.8</u>	<u>84</u>	<u>83.3</u>	<u>82.7</u>	77.8	66.7	49.1	51.6	41.8	29.8	26.6	31.6			
0.4	<u>92.4</u>	<u>90</u>	<u>90.4</u>	<u>85.8</u>	<u>84.8</u>	<u>78.8</u>	76.4	66	47.6	43	30.8	27.9	28.5				
0.5	<u>90.8</u>	<u>90.8</u>	<u>89</u>	<u>81.1</u>	<u>80.4</u>	78.4	78.7	64.6	53.8	29.7	27.6	21.8					
0.6	<u>90.1</u>	86.5	83.5	80.8	80.2	78.6	77.4	61.8	47.5	23.8	16.3						
0.7	<u>100</u>	<u>86.8</u>	<u>80.8</u>	82	78.6	80.6	77.4	65.5	38.5	27.8							
0.8	--	58.3	79.5	80.1	77.1	78	70	50	37.9								
0.9	--	--	33.3	71.7	75	74.7	71.4	62.9	66.7	16.7							
1	--	--	--	100	75	74.6	73.8	65.4	100	--							
1.1	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--							
1.2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--							
1.3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--							
1.4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--							
1.5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--							
1.6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--							
1.7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--							
1.8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--							

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 29. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = 0,4$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	37,2																
-1,7	50	42,4															
-1,6	68	38,8	42,4														
-1,5	66,8	63,6	37,7	41,6													
-1,4	70,8	69,4	45,5	40,1	44,8												
-1,3	77,2	67,6	68,7	21,4	36,4	47,2											
-1,2	77,6	69,2	69,2	61,5	26	38,8	46,4										
-1,1	80,8	78,8	74,8	69,4	43,1	34,2	38,8	44,8									
-1	84	80	80,8	76,4	70,8	33,3	35,6	39,2	40,8								
-0,9	86,8	86,4	81,6	82,4	75,8	61,9	28,3	37,3	40								
-0,8	86	84,8	82,8	82,4	78,4	73,9	42,7	30,5	36,1	40							
-0,7	86	84,4	82,8	80,8	79,6	77,6	64,9	29,4	30,7	38,4	39,6						
-0,6	89,6	85,2	82,4	82,4	78,4	77,2	72,8	48,5	28,5	35,3	38,1	40,8					
-0,5	90,4	87,2	85,2	82,8	79,2	77,6	71,7	63,2	31,5	33,5	35,6	39,9	42,2				
-0,4	90,8	92	87,2	84,8	80,8	77,2	76,3	66,2	48,1	33,8	36,5	35,3	38,6	42,4			
-0,3	92,8	91,6	88	86,4	82,4	78,8	77,4	70,4	54,9	31,7	33,1	33,7	34,4	37,8	41,6		
-0,2	91,2	90,4	86	86	84,4	83,2	79,8	75	60,4	31,4	30,3	32,2	31,6	34	36,8	40,4	
-0,1	91,2	88	84,8	85,6	84	83,5	79,7	77,7	68	31,7	28,1	32,8	32,9	32,4	32	36,4	40
0,1	94	89,2	89,2	88	84,4	80,6	79,7	78,5	71,6	41,2	32,8	27,9	28,9	29,6	32,8	35,6	40
0,2	93,6	88	86,4	84,4	84	82,7	79,4	75,6	63,9	43,7	37	27,2	26,1	29,2	34	36,8	
0,3	88,4	85,6	84,4	83,6	81,9	80,9	78,7	71	52,5	51,1	40,9	30,3	25,7	30,6	36,5		
0,4	88,4	91,2	88,8	85,6	83,9	82,9	74,8	65,4	52,2	44,4	38,4	27,5	27	30,5			
0,5	90,4	88,8	89,2	85,9	83,1	78,3	79,6	67	54,3	32,6	26,6	22,5	26,1				
0,6	90,4	90,8	83,8	82,5	80,4	78,9	76,5	66,5	51,3	35,3	22	18,6					
0,7	83,8	85,6	81,4	80,9	80,2	80,2	76,9	68,7	44,4	23,1	15						
0,8	93,8	81,1	82,6	80,5	80,7	77	74,9	61,5	44	37,5							
0,9	100	75	80	79,2	77,6	73,5	68,5	61,5	33,3								
1	--	55,6	69,7	76,2	74,4	67,6	71,4	--	--								
1,1	--	75	74,3	79	75,8	100	--	--									
1,2	--	--	100	100	--	--	--										
1,3	--	--	--	--	--	--	--										
1,4	--	--	--	--	--	--	--										
1,5	--	--	--	--	--	--	--										
1,6	--	--	--	--	--	--	--										
1,7	--	--	--	--	--	--	--										
1,8	--	--	--	--	--	--	--										

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 30. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = 0,3$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	37,2																
-1,7	50	42,4															
-1,6	66,9	40,4	42														
-1,5	66	65,5	36,4	40,4													
-1,4	70,4	68,5	50	39,2	46												
-1,5	76,4	68,8	67,6	17,9	35,6	47,6											
-1,2	76,4	70,4	69,2	60,6	26,6	36,8	45,2										
-1,1	81,2	78,8	74,8	71,2	43,3	34,2	37,2	43,2									
-1	84,8	79,6	81,2	78	68,4	34,8	36,1	39,6	40,8								
-0,9	84,8	85,6	81,2	82,4	75,5	59,8	25,8	37,1	40,4								
-0,8	85,6	85,2	82,8	81,2	78,4	73,6	48,9	30,3	36,3	39,2							
-0,7	87,2	83,2	80,8	80	79,6	78	64,3	26,8	30,9	38,4	41,2						
-0,6	89,2	84,4	83,2	82,4	78,4	76	73,3	54	28,1	35,2	36,9	42,2					
-0,5	90,8	88	87,2	82,4	78	77,2	72,9	64,4	32	36,8	35,7	39,5	42,1				
-0,4	90	92	88	84,8	81,2	79,2	74,8	67,1	45,8	33	33,5	35	37,3	40,2			
-0,3	92,8	91,2	86,4	85,2	84,8	80	77,8	72,1	56,8	31,2	32,6	32,8	33,7	36,8	40		
-0,2	91,6	88,4	85,6	86	85,6	82,8	80,4	77,9	62,7	28	30,4	33,1	33,7	34	36,4	39,6	
-0,1	92	91,2	84,8	82,8	83,6	83,6	81,6	77,2	69,8	31,1	25,5	30,8	31,3	31,6	34	36,8	40
0,1	92,4	90,8	86,8	87,2	82	81,2	79,1	77,6	65,5	42,4	34,2	26,7	26,6	28,4	32,8	37,6	40
0,2	91,2	87,6	84,4	84,8	82,8	81	77,4	73,1	58,5	49,2	41,5	29,7	25,4	29,7	32,8	37,2	
0,3	88,8	85,2	84,8	85,6	83,5	81,5	75,4	70,6	54,3	45,7	38,3	28,1	25	30,2	32,8		
0,4	86,8	90,4	90	86,8	84,7	82,2	77,5	69	56,1	31,8	27,6	21,3	26	32,5			
0,5	88,4	89,2	89,2	84	81,1	79,9	78,1	67,7	54,1	28,3	27	23,1	28,3				
0,6	90,4	89,6	84,4	81,9	80,7	78,9	77,3	69,4	51	14,3	18,2	21,4					
0,7	82,8	85,4	80,2	80,3	80,3	76,9	75,8	70,2	50	66,7	0						
0,8	87	82,9	82,5	83,1	77,9	78,9	72	61,1	60	--							
0,9	50	77,8	77,5	74,6	75,8	75,5	63,2	66,7	--								
1	--	60	72,6	75,4	73,3	67,6	--	--	--								
1,1	--	71,4	71,1	70,7	83,3	--	--	--									
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--									
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--									
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--									
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--									
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--									
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--									
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--									

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 31. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = 0,2$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	37,6																
-1,7	50	40,8															
-1,6	66,1	41,3	41,2														
-1,5	68	63,9	35,8	40													
-1,4	70	70,7	53,3	37,7	46,4												
-1,3	76,4	69,2	67	16,7	36,5	46,4											
-1,2	76	71,2	71,6	59,6	25,8	37,2	46,4										
-1,1	82,8	76,8	76	71,6	52,4	34,4	39,2	42,6									
-1	84,4	80	80,8	78	68,5	34,9	35,2	39,5	40,4								
-0,9	86	83,6	82	81,2	76	63,2	28,8	35,6	40,6								
-0,8	84	84,4	82,8	81,2	80,4	75,3	53,1	29,8	34,7	40,2							
-0,7	86	83,2	81,2	80	78,4	75,7	68,3	32,8	33,8	37,3	41,4						
-0,6	88,8	83,6	82,8	81,2	79,2	76,4	72,2	53,2	29,6	35,7	37,3	42					
-0,5	90	88,8	87,6	82,8	80	77,6	74,3	64,1	34	33,2	34,1	37,1	41,2				
-0,4	89,6	92,4	86,8	86	83,6	80,4	76,4	69,2	50,8	30,5	32,4	32,7	36	39,6			
-0,3	92,8	88,8	86,4	85,6	84,8	82,8	80,7	77,2	59,5	28,1	33,1	32,4	34	34,4	38		
-0,2	90,4	87,6	84	85,6	83,6	82,8	81,8	77,2	68,7	26,3	27,3	31,3	30,9	32,4	35,2	38,8	
-0,1	92,8	92,4	86,8	82,8	83,6	80	77	75,6	70,9	35,8	26,5	28,5	28,5	31,2	32,8	35,6	42,8
0,1	93,2	88,4	86	84	83,2	80,7	78,4	74,4	62,7	46,6	37,3	28	26,4	28,8	31,6	37,6	40
0,2	90,8	87,2	86	84	83,2	81,5	76,5	72,6	58,1	45,8	40,7	27,9	26,4	29	32,5	35,2	
0,3	87,6	87,2	86	86,8	83,9	83,1	76,5	71,4	55,1	34	28,8	20,4	24,7	31,1	33,8		
0,4	88	90,4	90,4	85,6	83,9	81,5	79	69,3	52,7	31,8	33,3	23,7	26,7	29,2			
0,5	88,8	92,4	88	84	82,8	79,4	79,7	71,6	58,5	35	25	20	27,3				
0,6	90	85,6	82,4	82,4	80,7	79	75,4	76,4	59,1	0	--	0					
0,7	84,3	85,5	83,1	81,9	79,1	75,1	72,3	66,2	61,5	--	--						
0,8	85,3	82,1	81,4	79,3	75,6	75	71,8	76,9	100	--							
0,9	100	80,2	79,1	75,8	74,5	70,6	58,8	--	--								
1	--	81,6	73,2	71,6	71,1	66,7	--	--	--								
1,1	--	85,7	80,6	80	100	--	--	--	--								
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--								

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 32. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = 0,1$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	38,8																
-1,7	50	42															
-1,6	66,8	44,2	40,4														
-1,5	69,2	61,4	33,8	41,6													
-1,4	69,6	70,7	52,6	38,5	46												
-1,3	75,2	68,4	68,1	22,2	37,3	45,6											
-1,2	79,6	72,4	72	59,4	24,7	36,8	44										
-1,1	82,4	76,8	76,8	73,5	56,9	33,1	38,8	42,8									
-1	84	80,4	81,6	78	70,6	35,9	34,5	37,7	40,8								
-0,9	83,2	83,2	82,4	82	77	66,2	27,9	33,2	38,8								
-0,8	82,8	83,2	82,4	79,6	78,8	74,8	57	31,7	34,3	41,8							
-0,7	87,2	83,2	83,2	81,6	79,6	74,3	74,2	38,3	32,7	36,4	42,2						
-0,6	88	86,8	84,8	83,2	79,6	78,8	71,2	55,7	30,4	33,7	35,6	41					
-0,5	90,4	89,6	88,4	83,2	82,4	79,6	76,4	66	36	32	33,3	35,2	41,4				
-0,4	90,4	91,2	87,2	86	84,4	81,2	79,9	71,9	49,5	31,1	32,4	32,9	34,1	38,8			
-0,3	89,6	88,4	86,4	84,4	84,8	83,6	80,3	79,8	64,2	25	29,1	31,6	33,7	33,6	39,2		
-0,2	92,8	88,4	82,4	84,4	82	79,6	78	77,3	70,7	28,2	26,1	28,3	28,8	34	34,8	38,8	
-0,1	91,2	93,2	86	82,4	80,8	80,4	77,8	76,6	70,2	36,8	29,5	25,7	25,7	28,8	32,4	33,6	40,4
0,1	93,6	90,8	84,4	85,6	82,4	81,9	78,6	72,9	60,2	50,6	36,8	27,4	23,7	29	31,2	35,6	40,8
0,2	89,2	89,2	86	84	82,8	82,3	77,6	72,1	55,9	44,2	35,8	18,9	23,4	28,7	31,3	35,2	
0,3	86,4	84,8	88,4	86,8	85,6	82,7	79,7	69	53,3	36,2	29,6	29,7	24,6	28,9	37,2		
0,4	92	87,2	88	85,2	83,6	82,2	79,9	73,2	60,4	43,5	42,9	22,2	26,1	27,1			
0,5	90,8	92,4	87,2	82	83,6	81	77,7	74,6	64,4	50	--	--	25				
0,6	91,2	86	82,4	81,2	79,6	77,2	76,1	68,9	56,3	--	--	--					
0,7	82,6	85	81,1	79,9	79,1	75	74,3	60,4	57,1	--	--						
0,8	86,3	83	80,6	78,5	75,5	74,9	65,4	80	--	--							
0,9	100	79,6	79,3	74,5	74,9	71,1	75	--	--								
1	--	78,7	77,4	73,7	69	100	--	--	--								
1,1	--	81,8	81,8	77,8	--	--	--	--	--								
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--								
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--								

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 33. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = -0,1$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	42,8																
-1,7	100	40															
-1,6	69,3	35,3	40,4														
-1,5	71,6	67,4	30,6	43,2													
-1,4	68,8	68,4	69,2	37,8	46,4												
-1,3	73,2	69,2	69,6	25	37	44,4											
-1,2	80,8	76,4	73,2	66,8	33,8	36,8	41,6										
-1,1	85,6	82	78	74,8	61,7	29,5	36	42,3									
-1	84	80,8	81,6	78	73,2	51,4	33,6	37,1	40,6								
-0,9	80,8	83,2	80,8	79,6	77,2	73,8	34,3	33,5	36,3								
-0,8	83,2	82,4	79,6	80,4	79,6	72,5	65,7	30,4	32,4	40							
-0,7	85,2	82,8	86	83,2	80,8	79,2	71,9	45,2	32,2	33,6	38						
-0,6	86	85,2	84,4	82,8	82	80,8	76	64,2	29,2	32,7	33,7	38,8					
-0,5	88,4	90	86	83,2	83,2	83,2	80,4	75,8	42,8	30,6	31,7	33,3	37,6				
-0,4	89,6	85,2	85,6	88	84	82,8	79,8	82	60,1	25,8	29,1	30,6	34	40,4			
-0,3	84	88	84	84,4	82,4	79,2	78,7	79,7	69,2	31,6	25,9	28,6	29,2	32,8	40		
-0,2	89,2	90,8	86	80,8	80	80	79,1	74,8	69,3	39,6	29,8	27,2	29,3	29,2	33,2	38,4	
-0,1	92,8	92	86,8	85,2	82,8	82,3	76,8	71,6	62,1	47,4	33,9	25,4	25,4	27,2	29,6	34	39,6
0,1	91,6	89,2	84,4	84,4	82,3	82,9	78,2	69,1	53,5	44,8	37,8	26,2	18,6	25	31,3	33,6	41,2
0,2	91,2	87,2	86,8	86	85,9	84,1	79,9	74	57,6	47,7	30	40	28,6	22,4	30,1	40,1	
0,3	89,6	87,6	84	83,2	83,6	81,7	78,1	76,6	67,1	56,3	33,3	0	66,7	50	29,7		
0,4	92,8	89,6	90	82	82,8	79,9	77,4	75,1	67,8	50	50	--	--	--			
0,5	92	90,4	86	84,4	79,2	76,3	76,3	74,6	61,7	--	--	--	--	--			
0,6	91,6	86,8	84	81,2	79,6	76,3	75,3	68	75	--	--	--	--	--			
0,7	82,9	84	79,6	80	79,8	75	73,6	58,3	--	--	--	--	--	--			
0,8	81,9	81,2	77,7	76,5	74,7	74,1	63,2	--	--	--	--	--	--	--			
0,9	92,9	80,8	78,2	77,3	78	66,7	100	--	--	--	--	--	--	--			
1	--	75,4	76,1	76	70,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--			
1,1	--	83,3	82,6	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--			
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--			
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--			
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--			
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--			
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--			
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--			
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--			

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 34. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = -0,2$

$\Phi \backslash \Psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	42,8																
-1,7	100	38,8															
-1,6	70	31	39,6														
-1,5	74	64,9	31	42,8													
-1,4	69,6	68,8	67,4	35,8	44,8												
-1,3	73,2	71,2	70,8	33,3	36,8	42,2											
-1,2	82	78,8	75,2	71,7	38,3	37,2	41,4										
-1,1	84	83,6	79,2	76	68,8	30	35,2	40,4									
-1	83,2	82	80,8	79,6	74,2	63,2	31,9	35,4	39,2								
-0,9	82,4	83,6	81,6	78,4	77,6	71,2	42,4	34,6	35								
-0,8	82,8	82,8	82	80,8	78	75,5	67,1	30,2	33,2	36							
-0,7	83,6	84	87,2	83,6	80,4	78,4	73,4	52,3	28,1	35,6	37,6						
-0,6	88,4	84	84	82,4	82	83,2	78,7	71,6	33,9	31,4	35,5	37,8					
-0,5	89,2	87,6	87,2	84,4	84,4	82,3	81,3	80,3	52,2	28,4	30,3	32,1	38,8				
-0,4	90,8	87,6	86,4	86,4	83,6	80,4	78,9	80,3	65,5	27,9	27,2	27,9	31,2	38			
-0,3	89,2	86,8	86	84	83,2	79,4	76,8	73,8	71	34,6	28,2	28,2	26,9	30	36,8		
-0,2	92,4	89,6	86	82	83,6	81,8	76,4	69,6	61,3	47,4	29,4	26,6	25,9	28,8	33,2	37,2	
-0,1	92,4	90	86,4	85,6	84,4	84,5	78,6	68,9	52,4	51,5	42,4	26,4	20,6	26,7	30,4	35,6	42
0,1	90	90,4	84,4	87,6	83,9	84,1	78,9	72,5	53,8	51,4	44,4	30	29,2	23	30,1	36,4	41,2
0,2	93,2	85,2	85,6	85,2	83,1	83,3	80,1	75,9	63,9	50	66,7	75	66,7	35,7	26,8	33,6	
0,3	87,6	87,2	85,6	84,4	82,4	78,8	76,4	75,3	68,2	61,5	50	--	--	--	25		
0,4	92	92	88,8	84	79,2	77,9	75,3	74,1	67,3	75	--	--	--	--	--		
0,5	90,8	89,2	85,6	82,8	80,4	78	75,2	76,2	57,4	--	--	--	--	--	--		
0,6	89,2	88,4	83,6	80,8	80	77,6	75,9	68,9	85,7	--	--	--	--	--	--		
0,7	85,1	82,4	81,2	78,4	77,5	75,2	73,5	62,5	--	--	--	--	--	--	--		
0,8	80	79,3	77,1	78,5	75,5	76	66,7	--	--	--	--	--	--	--	--		
0,9	80	81,3	78,9	79,5	75,2	70,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--		
1	1	50	76,8	75,2	76,1	80	--	--	--	--	--	--	--	--	--		
1,1	--	92,9	85	50	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--		
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--		
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--		
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--		
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--		
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--		
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--		
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--		

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 35. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = -0,3$

$\phi \backslash \theta$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	41,6																
-1,7	--	40,4															
-1,6	73,1	31,8	38,4														
-1,5	76,4	66,9	30,2	42,4													
-1,4	69,6	70,8	62,7	35,4	43,2												
-1,3	76,8	70,8	72,6	52,9	37,6	41,2											
-1,2	84,4	78,4	76,8	73,9	39,1	35	39,6										
-1,1	83,2	85,6	79,6	74	72,4	30,6	34,3	38,7									
-1	80,4	81,6	80,8	80	74,4	69,8	31,4	33,3	38,2								
-0,9	84,8	84,4	81,6	78,4	76,8	72,2	51,3	31,8	34,3								
-0,8	80,4	83,2	83,6	80,8	80,8	78	72,9	33,3	30,4	35,6							
-0,7	84,8	84,8	82,8	82	82,8	82,4	78,4	62,8	25,3	34,3	38,8						
-0,6	89,6	87,2	83,2	82,4	82,4	80,7	80,4	77,2	41,2	29,5	32,4	38,4					
-0,5	86,4	88,8	86	88,4	86	80,2	78,8	78,2	61,6	28,3	27,6	31	37,2				
-0,4	88,4	88	84,8	86,8	84,4	82,1	76,6	74,1	71,7	31,5	27,8	26,9	29,7	34,8			
-0,3	89,6	90	85,2	83,2	81,6	80,8	76,6	68,1	59,4	44,4	27,4	25,1	27,1	30	34,4		
-0,2	93,2	89,6	86	84	85,6	82,5	78,8	65,5	49,1	53	44,4	27,1	21,8	27,2	32	36	
-0,1	91,6	89,2	84,8	84	84,3	82,3	76,8	68,1	44,5	48,3	57,5	29,4	22	23,3	30,4	34,4	39,2
0,1	92	92,2	86	86	83,5	84,1	81,7	74,8	59,6	56,7	72,7	50	75	25	28,8	33,1	41,3
0,2	93,6	87,2	84,8	85,6	82,4	80,1	78,4	76,1	68,2	51,9	33,3	0	--	--	42,9	26,5	
0,3	88	86,4	88,8	84,4	82	78,6	74,8	72,9	67,3	66,7	100	--	--	--	--	--	
0,4	92,8	92	89,2	83,6	80,4	78,4	76,8	75,7	68,5	100	--	--	--	--	--	--	
0,5	91,6	89,6	87,6	84,4	80	79,2	75,7	78,1	54,5	--	--	--	--	--	--	--	
0,6	87,2	86,4	84,4	82	80	77,6	75,4	67,1	80	--	--	--	--	--	--	--	
0,7	83,2	82,8	80,4	78,4	79,1	76,3	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
0,8	77,9	81,9	79,9	81,9	79,5	77,7	66,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
0,9	84,2	83,1	79,3	79,4	73,8	84	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1	66,7	82,2	76,3	72,6	71,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,1	--	85,7	84,2	0	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 36. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = -0,4$

$\phi \backslash \theta$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	38,8																
-1,7	--	41,6															
-1,6	73,8	36,4	38														
-1,5	75,2	68,1	34,9	41,2													
-1,4	69,6	69,6	63	30,8	42,8												
-1,3	77,2	74	73,2	65,3	32,9	38,2											
-1,2	85,6	78	76	75,6	47,9	33,6	38,6										
-1,1	82,4	85,2	79,6	76,8	75,6	40,5	33,5	37,3									
-1	83,2	84,4	80	78	75,6	69,1	30,3	32,5	36,4								
-0,9	84	84	82	81,6	76,4	77,1	61,6	28,1	31,8								
-0,8	81,2	82,4	85,6	82,8	82,8	80	76,9	46,1	25,2	35,6							
-0,7	84,8	84,4	82	80,8	81,6	80,7	81,2	74,6	30,5	30,7	36,9						
-0,6	88,8	90,4	84,8	83,2	82,8	79,8	79,6	79,4	56,6	28,2	30,2	35,7					
-0,5	88,4	89,2	86	86	83,5	81,6	75,8	73,6	70,7	28,5	28,3	27,8	35,2				
-0,4	88	87,6	88	84,4	82,7	82,1	76,4	66,3	58,4	43,9	25,5	26,9	25,9	32,4			
-0,3	89,2	88,4	86,8	82,4	83,6	81,1	78,4	55,1	43	53,3	44,5	26,4	25,3	29,6	33,6		
-0,2	92,8	88,4	84,8	82,8	84	83,3	76,3	60	33,8	49,6	59,6	34,7	24	25,3	30	35,6	
-0,1	92,8	91,6	84,8	85,2	81,5	81,8	77,5	62,4	35,3	52,3	59	47,6	25	26	26,8	31,6	36,4
0,1	92	90,4	87,2	85,2	83,5	82,1	80,3	76,6	63,5	54,5	61,5	66,7	0	--	37,5	28,3	39,1
0,2	91,2	88,8	86,4	84	80,8	78,4	76,8	73,8	72,4	57,7	66,7	--	--	--	--	0	
0,3	88,8	86,8	89,6	85,6	80,4	79,1	78,5	75,1	70,3	62,5	--	--	--	--	--	--	
0,4	93,6	89,6	88,8	80,8	78,8	80	75,2	74,6	70,7	100	--	--	--	--	--	--	
0,5	92,4	88,8	87,2	83,6	82	78,8	75,8	74,2	58,5	--	--	--	--	--	--	--	
0,6	86,8	86,4	82,8	82,4	81,6	76,7	75,7	64,6	75	--	--	--	--	--	--	--	
0,7	81,7	82,8	78,4	79,6	79,5	77	76,5	71,4	--	--	--	--	--	--	--	--	
0,8	75,2	84,1	79,2	81	80,7	76,5	72,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
0,9	81	81,7	78,9	81,8	75,6	82,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1	75	82,3	74,3	75,3	72,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,1	--	85,7	78,9	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 37. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = -0,5$

$\phi \backslash \theta$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	41,2																
-1,7	--	40,4															
-1,6	72,2	25	36,8														
-1,5	75,6	71,1	37,1	39,4													
-1,4	70,4	72,8	66,8	34,4	38,2												
-1,3	78	78,4	76,8	68,2	28,2	34,5											
-1,2	84,8	79,6	77,2	76,4	72,4	34,1	36,9										
-1,1	89,6	84,8	81,2	78,8	75,2	58,2	31,8	36									
-1	83,2	83,6	80,8	80	77,2	74,7	37,5	30,4	34,7								
-0,9	85,2	84	85,6	80,4	78,8	78	76,4	27,3	28,9								
-0,8	81,6	81,2	83,2	82	80,7	81,5	80,7	66,2	24,3	35,5							
-0,7	83,6	86	82,4	82,4	80,8	81,1	79,7	79,1	48,7	29,7	33,5						
-0,6	89,6	89,6	84,8	85,6	83,5	81,2	74,4	74	69,7	27,1	30,1	32,7					
-0,5	87,6	88,4	88,8	84,4	86,1	81,9	73,1	59,2	56,3	40,9	26,2	25,9	29,7				
-0,4	89,6	88,4	86,8	83,2	83,7	81,3	73,3	50	41,7	53,8	43,5	26,7	26,4	28,8			
-0,3	91,2	89,2	85,2	82,4	83,1	80,3	74,7	49,6	31,6	47,5	59,8	38,1	21,5	28	29,6		
-0,2	92,8	91,6	85,6	83,6	83,4	82,6	77,8	52,9	32	45,8	56	60	26,8	24,6	27,1	32,8	
-0,1	92,2	92,4	84,4	84,4	83,1	82,1	78,4	61,5	35,8	46,6	50	58,3	42,9	14,3	24,1	31,7	36,8
0,1	92,4	89,2	86,4	85,2	81,1	78,5	77,9	75,2	65	50	69,2	100	--	--	--	40	27,5
0,2	90,4	88	87,2	84,4	81,2	78	77,4	74,8	73,2	59,1	100	--	--	--	--	--	--
0,3	89,2	86	90	84	81,2	80,3	79,3	74,4	71	80	--	--	--	--	--	--	--
0,4	94,4	88	86	82,8	81,2	81,6	75,7	74,8	71,1	--	--	--	--	--	--	--	--
0,5	91,6	89,6	86,4	83,2	81,6	79,6	74,8	75	57,9	--	--	--	--	--	--	--	--
0,6	88,4	86,8	81,2	82	81,2	78	78,8	67,7	75	--	--	--	--	--	--	--	--
0,7	82,9	80,4	78,8	80	79,9	78,1	74,5	66,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0,8	76,3	83,8	80	80,2	80	76,6	66,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0,9	88,5	79,9	79,1	79,2	75	78,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1	75	84	74,6	77,6	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,1	--	85,7	81,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 38. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = -0,6$

$\phi \backslash \theta$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	40,4																
-1,7		38,4															
-1,6	73,1	0	38,4														
-1,5	74	69,8	27,3	35,5													
-1,4	73,2	74,8	70,8	43,6	35,9												
-1,3	81,2	78,8	76,4	74,7	36,9	33,6											
-1,2	85,6	82,8	79,2	77,6	71,6	31,3	33,7										
-1,1	84,4	84	78,4	77,6	71,3	28,1	34,3										
-1	82,4	84,8	83,2	80,4	80,4	77,2	66,3	24,3	32,2								
-0,9	84,4	84	84,4	81,6	81,5	82,3	78,8	53	25,6								
-0,8	85,2	82,4	82,8	81,1	82,2	80,8	79,7	76,9	39,1	31,7							
-0,7	86,8	84,4	82,4	82,7	81,9	78,1	72,5	73	67,3	29,3	30,5						
-0,6	90	87,6	85,6	85,2	83,8	81,1	63	53,6	54,1	37	25,3	29					
-0,5	87,2	87,6	89,6	84,4	85,7	82,4	67,2	40,1	33,1	53,7	44,2	24,3	28,3				
-0,4	89,2	87,2	86,8	84,4	81	80,9	64,9	42,7	25,9	44,7	58,9	41,7	22,6	28,3			
-0,3	90,8	88,4	86,8	83,2	81,6	80,5	69,7	42	25,6	34,8	52,2	56,1	38,3	23,5	31		
-0,2	91,6	91,6	85,6	84	82,5	82,5	76	51,6	26,4	37	44,3	60	36,4	20	25	31,3	
-0,1	90,4	92,8	83,6	83,6	82,7	82,8	81	60,4	38,6	41,4	40,9	61,5	75	33,3	21,4	30,2	36,5
0,1	92,4	87,6	83,2	84,4	81,1	79,1	77,9	75,1	66	47,7	50	--	--	--	--	--	0
0,2	88,4	89,6	88	85,2	82,4	78,9	78,6	75,4	75	68,4	100	--	--	--	--	--	--
0,3	90	88	88,8	82,4	79,2	79,6	77,7	76,4	71,2	100	--	--	--	--	--	--	--
0,4	93,2	86,8	86,8	83,2	82,4	80,4	77,5	75,4	70,5	--	--	--	--	--	--	--	--
0,5	90,4	90	85,2	82,8	82,8	79,6	75,9	75,2	61,1	--	--	--	--	--	--	--	--
0,6	86,8	86,4	82,4	81,6	81,2	77,2	79,1	68,4	100	--	--	--	--	--	--	--	--
0,7	82,9	78,8	79,2	82,4	81,5	78,8	72,9	60	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0,8	79,7	83,9	80,8	79,8	79,1	74,6	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0,9	89,7	77,7	76,5	76,9	76,3	76,9	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1	100	81,2	75,9	78,7	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,1	--	71,4	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 39. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = -0,7$.

$\Phi \backslash \theta$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	40																
-1,7	--	34,8															
-1,6	67,2	42,9	34,8														
-1,5	71,2	70	60	34													
-1,4	72	75,6	75,2	66,7	33,9												
-1,3	80,8	78	76,8	76,3	56	32,1											
-1,2	84	81,2	81,6	78	77,4	51,3	31,3										
-1,1	82	83,6	80,4	80,8	78,4	79,2	38,8	29,9									
-1	84	85,2	82,8	82,4	82,4	80,6	76,4	35,9	28,3								
-0,9	83,2	82	82,4	80,3	82,3	80,9	80,1	76,1	28,5								
-0,8	84,4	83,2	84	79	79,4	75,6	72,1	70,9	64,8	30,3							
-0,7	88,8	87,6	85,2	84,6	82,9	74,4	58,6	49,4	50,3	36,4	28						
-0,6	90,4	87,6	86	85,1	86,5	80	52,8	35	30,2	54	39,6	26,1					
-0,5	89,6	85,6	88,4	83,1	83,4	80,1	50	30,7	23,2	36,5	59,7	38,7	26,4				
-0,4	90,4	86	85,2	85,2	82,8	78,2	63,7	37,6	24,5	26	51,9	65,5	40,7	25,3			
-0,3	90,8	88,8	84,4	83,6	82,7	79,6	71,6	36,8	21,7	26,7	37,6	51,3	55	25,8	25,7		
-0,2	91,6	91,2	85,6	82	83,3	82,2	77,9	51,2	29,1	30,4	37	53,6	57,1	50	23,5	28,9	
-0,1	90,8	92,8	85,2	82	79,9	80,1	78,8	56,8	37	35,4	36,4	38,5	100	50	0	25	34,4
0	91,2	88,4	84,8	84	83,5	79,1	77,7	76,2	70,3	55,8	33,3	--	--	--	--	--	--
0,2	90,4	89,6	90	86	81,2	77,7	78	74,3	72,8	71,4	--	--	--	--	--	--	--
0,3	89,6	89,2	87,6	85,2	76,8	79,6	78,2	75,2	72,4	100	--	--	--	--	--	--	--
0,4	92	86,4	89,2	84	84,8	80,4	78,4	76,4	70,3	--	--	--	--	--	--	--	--
0,5	91,2	90,4	84,4	82,8	83,6	79,6	77,5	77,1	62,9	--	--	--	--	--	--	--	--
0,6	85,6	84,4	81,6	80	82	79,7	81,1	67,9	100	--	--	--	--	--	--	--	--
0,7	86,2	80,4	80,4	82,4	80,7	79,3	72,8	66,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0,8	80,2	83,5	81,2	80,6	79,5	73	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0,9	86,2	78,5	76	76,8	74,3	72,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1	100	80,5	74,8	75,7	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,1	--	71,4	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 40. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = -0,8$

$\Phi \backslash \theta$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	36,9																
-1,7	100	33,5															
-1,6	70,8	74,1	33,3														
-1,5	69,2	73,2	70,1	34,4													
-1,4	72,8	75,6	76	70,2	33,7												
-1,3	80,8	80,4	77,6	76,8	76,5	28,1											
-1,2	84	83,6	81,6	79,2	77,6	77	22										
-1,1	83,2	84	79,2	80,8	81,2	80,2	76,4	23,3									
-1	81,6	83,6	80,8	78,8	80,8	79	79,9	72,5	23,8								
-0,9	80,4	81,6	79,2	77,9	79,7	75,7	71,6	70,5	60,8								
-0,8	84	82,8	82,8	81,8	81,1	68,2	56,4	46,7	48,5	29,7							
-0,7	88,8	87,2	85,6	85,2	84,6	71,3	48,3	32,4	29,1	54,1	33,5						
-0,6	92,4	89,6	85,2	84,3	85,9	75,9	41,9	26,4	24,7	24,7	58,2	40,1					
-0,5	88,8	85,2	88	82,7	81,6	77,6	46,3	28,2	24,4	24,1	39,3	65,9	41,7				
-0,4	89,6	86,8	83,6	81,6	80,9	78,3	62,7	26,2	22,7	20,8	27,5	51,9	68,8	27,1			
-0,3	91,2	89,6	87,6	85,2	80,7	81,5	67	34,2	20,9	20,7	27,2	40	61,5	50	25		
-0,2	90,4	92	82,8	81,2	81,7	82,5	77	48,1	28,4	26,7	33,7	32	50	100	0	28,6	
-0,1	91,6	92	83,6	81,2	78,7	78,3	77,6	58,4	33,7	33,1	34,9	23,1	--	--	--	--	12,5
0	91,6	90,4	86	82,8	82,8	79,1	77,7	75,9	71,2	53,5	33,3	--	--	--	--	--	--
0,2	90	88,4	90	83,6	80,4	79,8	78,1	77,4	74	69,2	--	--	--	--	--	--	--
0,3	88,8	88	86,8	83,6	80,4	80	79,1	76,3	72,7	100	--	--	--	--	--	--	--
0,4	92	86,4	88,4	84,4	84,4	82,4	82,4	79,2	76,3	71,1	--	--	--	--	--	--	--
0,5	91,2	88,8	85,6	82,4	82,8	82	78,9	79,9	64,8	100	--	--	--	--	--	--	--
0,6	84,4	84,8	81,2	80	82	82,8	81	80,1	74,5	66,7	--	--	--	--	--	--	--
0,7	85,8	80,8	81,2	82,8	81	80,1	73,9	62,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0,8	82,5	82,6	80,4	79,4	79,4	73,9	62,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0,9	83,3	78,5	76	76,8	75	70	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1	100	81,6	75,4	75,3	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,1	--	71,4	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 41. Procentowy udział poprawnego kierunku zmiany wartości szeregu w ogólnej liczbie min/max modelu ARMA(2,1) dla $\theta = -0,9$

$\phi \backslash \psi$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
-1,8	33,5																
-1,7	73,3	29															
-1,6	72,4	68,3	29,5														
-1,5	69,6	75,2	72,2	51,1													
-1,4	74,4	74,8	75,2	75	61,9												
-1,3	80	80,4	77,2	75,2	77,4	59,6											
-1,2	84,8	81,2	81,2	81,6	79,2	79,8	64,6										
-1,1	80,4	82,8	82,8	82	81,1	78,3	77,2	65,4									
-1	82,4	81,2	80	78	81,1	76,3	73	72,4	57,3								
-0,9	81,2	79,2	79,2	77,3	80,2	70,4	61	53,5	51,4								
-0,8	86	82,8	83,2	83,1	79,1	63,9	45,1	35,4	32,5	51,5							
-0,7	90,4	84,4	85,6	86,7	85,3	65,1	37	22,4	23,3	23,2	56,8						
-0,6	89,2	88,4	85,2	81,8	82,6	73,4	42,7	24,4	24,2	21,6	25,7	56,8					
-0,5	91,2	86,4	85,6	83,1	80	74,6	44,4	28	23,7	17,4	19,9	31,9	61,5				
-0,4	89,2	86,4	86,4	82,4	81,5	82,2	60,5	26,2	21,4	16,8	24	34,3	52	77,8			
-0,3	94,4	91,2	86	84	81,5	81,2	72	30,7	24,1	19,7	25,2	30,4	25	100	50		
-0,2	91,6	91,6	82,8	80,8	81,7	81	74,6	47,3	25,3	27,4	26,7	25,9	0	--	--	--	
-0,1	90,8	90,8	82,8	82,8	80,3	78,2	75,8	60	36,7	33,1	34,8	30,8	--	--	--	--	
0,1	91,6	92,4	86,4	83,6	82	79,1	76,8	74,1	70,9	47,6	33,3	--	--	--	--	--	
0,2	90	88,8	89,6	84	81,2	81,4	78,6	74,2	74,4	76,9	--	--	--	--	--	--	
0,3	90	88	85,6	83,2	83,2	80,4	80	77,7	73,4	100	--	--	--	--	--	--	
0,4	90	87,2	89,2	84	82,8	81,2	80,4	76,8	72,7	--	--	--	--	--	--	--	
0,5	91,6	88	86,4	81,6	81,6	82,4	78,8	77,3	66,7	--	--	--	--	--	--	--	
0,6	85,6	86	81,2	80	83,2	78,4	80,4	66,7	100	--	--	--	--	--	--	--	
0,7	85	81,2	81,2	83,2	80,6	80,9	74	66,7	--	--	--	--	--	--	--	--	
0,8	81,9	82,6	81,6	79,4	79,3	73,9	62,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
0,9	83,3	79,5	75,9	77,3	75	60	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1	100	81,6	74,6	75	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,1	--	71,4	75	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,5	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,7	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
1,8	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	

Źródło: Obliczenia własne

LITERATURA

- Aoki M., (1983), *Notes on Economic Time Series Analysis: System Theoretic Perspectives*, Springer-Verlag, Berlin.
- Aoki M., (1990), *State Space Modeling of Time Series*, Springer-Verlag, Berlin.
- Anderson Brian D.O., Moore John B., (1984), *Filtracja optymalna*, WNT, Warszawa.
- Arndt Ch., Foster K., (1997), „A State Space Model of Monthly US Wheat Prices, w: *Applications of Computer Aided Time Series Modeling* (Ed: M. Aoki, A.M. Havenner), Springer.
- Bazeli B., (1995), „Struktura stochastycznych procesów stacjonarnych jako efekt ich agregacji czasowej”, w: *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Toruń 12-14 września.
- Bazeli B., (1999), „Uwagi o dezagregacji czasowej niektórych procesów stochastycznych i modeli dynamicznych”, w: *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Toruń 7-9 września.
- Beguín J.M., Gourieroux C., Monfort A., (1980), „Identification of an ARIMA Process: The Corner Method”, w: *Time Series*, ed. T. Anderson, North-Holland.
- Belsley D. A., (1973), „The Applicability of The Kalman Filter in The Determination of Systematic Parameter Variation”, *Annals of Economic and Social Measurement*.
- Berwald D., Havenner A.M., (1997), „Evaluating State Space forecasts of Soybean Complex Prices”, w: *Applications of Computer Aided Time Series Modeling* (Ed: M. Aoki, A.M. Havenner), Springer.

- Borooah V. K., Chakravarty S. P., (1979), „An Application of Kalman filtering”, *The 6th Conference on Problems of Building and Estimation of Large Econometric Models*, Polonica Zdrój.
- Box G.E.P., Jenkins G.M., (1983), *Analiza szeregów czasowych*, PWN, Warszawa.
- Brockwell P.J., Davis R.A., (1996), *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer.
- Brockwell P.J., Davis R.A., (1991), *Time Series: Theory and Methods*, Springer.
- Choi B., (1992), *ARMA Model Identification*, Springer-Verlag, New York.
- Dorfman J.H., (1997), „Competing Exchange Rates Models: A State Space Models vs Structural and Time Series Alternatives”, w: *Applications of Computer Aided Time Series Modeling* (Ed: M. Aoki, A.M. Havenner), Springer.
- Fahrmeir L., Tutz Gerhard, (1996), *Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models*, Springer Series in Statistics.
- Fichtenholz G. M., (1995), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa.
- Gajda J.B., (1993), *Model ekonometryczny w optymalnym sterowaniu gospodarką*, PWE, Warszawa.
- Gourieroux Ch., Monfort A., (1997), *Time Series and Dynamic Models*. Cambridge University Press.
- Górka J., (1997), „Reprezentacja ARMA i reprezentacja przestrzeni stanów szeregów czasowych”, w: *Dynamiczne modele ekonometryczne*, Toruń.
- Greene W.H., (1993), *Econometric Analysis*, wydanie drugie, Macmillan Publishing Company, New York.
- Grzesiak S., (1995), „Struktura stochastycznie zmiennych modeli parametru a równanie filtru Kalmana”, w: *Dynamiczne modele ekonometryczne*, Toruń.
- Grzesiak S., (1995), „Równania filtru Kalmana w modelowaniu ekonometrycznym”, *Przegląd Statystyczny*, zeszyt 1.
- Grzesiak S., (1997), „O wyznaczaniu wartości początkowych algorytmu filtru Kalmana”, *Przegląd Statystyczny*, zeszyt 1.

- Grzesiak S., (1997), *Metody ilościowe w badaniu efektywności ekonomicznej przedsiębiorstw*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.
- Grzesiak S., (1999), „Problem wygładzania w filtracji Kalmanowskiej”, *Przegląd Statystyczny*, zeszyt 4.
- Gutenbaum J., (1975), *Problem teorii regulatorów*, WNT, Warszawa.
- Hamilton J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey.
- Harvey A. C., (1990), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.
- Harvey A. C., (1993), *Time Series Models*, wydanie drugie, Harvester Wheatsheaf, London.
- Jajuga K., (1993), *Statystyczna analiza wielowymiarowa*, PWN, Warszawa.
- Jakubczyc J., (1996), *Wprowadzenie do ekonometrii dynamicznej*, PWN, Warszawa.
- Kiełbasiński A., Schwetlick H., (1992), *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, Warszawa.
- Koopmans L. H., (1995), *The Spectral Analysis of Time Series*, Academic Press, Inc.
- Koopman S. J., Shephard N., Doornik J. A., (1999), „Statistical Algorithms for Models in State Space using SsfPack 2.2”, *Econometrics Journal*.
- Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., (1997), *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa.
- Kufel T., (1995), „Poznawcze własności dynamicznych modeli zgodnych dla zależnych procesów egzogenicznych”, w: *Dynamiczne modele ekonometryczne*, Toruń.
- Kufel T., Piłatowska M., Zieliński Z., (1996), „Symulacyjna analiza poznawczych własności dynamicznych modeli zgodnych”, w: *Zeszyty naukowe AE*, Kraków.
- Kwiatkowski J., (1996), *Metody wyodrębniania i eliminacji trendu - podejście filtracyjne*, praca magisterska, Toruń.
- de Larminat F., Thomas Y., (1983), *Automatyka - układy liniowe t.2 Identyfikacja* WNT, Warszawa.

- Litwa A., (1985), „Wyznaczanie mnożników dynamicznych na podstawie postaci równań stanu ekonometrycznego modelu wielorównaniowego”, w: *Zeszyty Naukowe AE*, Kraków.
- Matkowski Z. (praca zbiorowa), (1997), *Z prac nad syntetycznymi wskaźnikami koniunktury dla gospodarki polskiej*, Wydawnictwo SGH, Warszawa.
- Meditch J.S., (1975), *Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych*, WNT, Warszawa.
- Michalczewska-Litwa A., (1977), „Postać wielorównaniowego modelu ekonometrycznego w przestrzeni stanów”, *Przegląd statystyczny*, zeszyt 1.
- Milo W., (1990), *Szeregi czasowe*, PWE, Warszawa.
- Ogata K., (1974), *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa.
- Ooms M., (1999), „Review of SsfPack 2.2: Statistical Algorithms for Models in State Space”, *Econometrics Journal*.
- Osiewalski J., Pipień M., (1999), „On Stationarity of ARMA Processes”, *Przegląd statystyczny*, zeszyt 1.
- Osińska M., (1999), „Stabilność reguły formułowania oczekiwań. Względność ekonomicznych koncepcji konstrukcji oczekiwań na przykładzie inflacji”, w: *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Toruń 7-9 września.
- Osińska M., (2000), *Ekonometryczne modelowanie oczekiwań gospodarczych*, Wydawnictwo UMK, Toruń.
- Ostasiewicz W. (red.), (1998), *Statystyczne metody analizy danych*, Wydawnictwo AE we Wrocławiu.
- Otter P. W., Mitnik S., (1989), *Parameter Identifiability in Kalman Filtering Models*, maszynopis.
- Pawłowski Z., (1981), *Elementy ekonometrii*, PWN, Warszawa.
- Piłatowska M., (1997), Alternatywne metody eliminacji trendu, a interpretacja modelu ekonometrycznego, w: *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Toruń.

- Pitt M., Shephard N., (1996), „Analytic Convergence Rates and Parameterisation issues for Gibbs Sampler Applied to State Space Models”, *European Conferences of The Econometrics Community*, Florencja.
- Priestley M.B., (1981), *Spectral Analysis and Time Series*, vol.1, Academic Press Inc, London.
- Rao C. R., (1982), *Modele liniowe statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa.
- Schweppe F.C., (1978), *Układy dynamiczne w warunkach losowych*, WNT, Warszawa.
- Sikorski A., (1980), „Wykorzystanie metody przestrzeni stanów przy wyznaczaniu mnożników”, *Przegląd Statystyczny*, zeszyt 3/4.
- Skrzypek J., (1985), „Próba oceny przydatności filtracji kalmanowskiej do estymacji modeli procesów gospodarczych”, w: *Zeszyty Naukowe AE*, Kraków.
- Statistica PL dla Windows*, (1997), tom 1, 2, 3, 4, 5, StatSoft Sp. z o.o., Kraków.
- Stawicki J., (1993), *Metody filtracji w modelowaniu procesów ekonomicznych*, rozprawy, UMK, Toruń.
- Stawicki J., Górka J., (1995) „Reprezentacja ARMA procesów stochastycznych”, w: *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Toruń.
- Strzała K., (1994), *Zastosowanie uogólnionych metod sterowania optymalnego do podejmowania decyzji gospodarczych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego.
- Talaga L. (1995), „Własności predyktorów regularnych procesów stochastycznych w świetle analizy spektralnej”, w: *Dynamiczne modele ekonometryczne*, Toruń.
- Talaga L., Zieliński Z., (1986), *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa.
- Wąsik B., (1977), *Modelowanie dynamiki systemów gospodarczych*, monografia, AE w Krakowie.
- Wąsik B., Litwa A., Skrzypek J., (1986), *Równanie stanu w badaniu dynamiki obiektów ekonomicznych*, AE w Krakowie.

- Wei W.W.S., (1990), *Time series analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Berlin.
- Witkowska D., (1993), *Optymalne sterowanie na podstawie modeli ekonometrycznych. Analiza empiryczna makrorelacji w gospodarce polskiej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.
- Wojtkiewicz A., (1984), *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*, WNT, Warszawa.
- Zastosowanie metod matematycznych w planowaniu*, (1982), praca zbiorowa, Prace i Materiały, Szkoła Główna Planowania i Statystyki, Warszawa.
- Zeliaś A., (1997), *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa.
- Zieliński Z., (1979), *Metody analizy dynamiki i rytmiczności zjawisk gospodarczych*, PWN, Warszawa.
- Zieliński Z., (1991), *Liniowe modele ekonometryczne jako narzędzie opisu i analizy przyczynowych zależności zjawisk ekonomicznych*, Wydawnictwo UMK, Toruń.