PROCESY AUTOREGRESYJNE ZE ZMIENNYM PARAMETREM[1]

Joanna Górka

Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania UMK w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki

WSTĘP

Niestacjonarne procesy o średniej zero mogą być reprezentowane przez procesy ARMA ze zmiennymi parametrami. Klasa procesów autoregresyjnych z losowymi parametrami[2] (ozn. RCA) była po raz pierwszy opisana w monografii Nichollsa i Quinna (1982). Przedmiotem zainteresowań są modele autoregresyjne rzędu pierwszego z losowym parametrem, tzn. modele postaci:

$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

gdzie $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon)$.

Można wyróżnić dwa przypadki:

1. jeżeli $\beta_t = \exp(\alpha_t)$, gdzie α_t jest stacjonarnym procesem takim, że $\alpha_t \sim NID(m, \sigma_\alpha)$, to mamy proces typu STUR (por. Leybourne, McCabe, Tremayne (1996), Leybourne, McCabe, Mills (1996), Grager, Swanson (1997), Osińska (2004)),
2. jeżeli $\beta_t \sim IID(p, \sigma_\beta)$, to wówczas mamy do czynienia z modelem RCA(1) (por. Leybourne, McCabe, Tremayne (1996)).

Powstaje pytanie: jakie własności posiada model AR(1) ze zmiennym parametrem, jeżeli parametr opisany jest przez model AR(p)? W literaturze ekonometrycznej tego typu modele nie były jak dotąd przedmiotem badań.

---

[1] Praca przygotowana w ramach projektu badawczego nr 2-H02B-015-25 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.

[2] Ang. random coefficient autoregressive model.

Celem referatu jest przedstawienie procesu RCA(1, *p*), jego własności, przykładowych realizacji oraz porównanie z innymi klasami modeli.

Przedmiotem badań są procesy autoregresyjne rzędu pierwszego ze zmiennym parametrem, przy czym parametr jest opisany przez model AR rzędu *p*. Proces taki można zapisać w postaci ogólnej jako:

$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

$$\beta_t = \alpha_1 \beta_{t-1} + \alpha_2 \beta_{t-2} + \ldots + \alpha_p \beta_{t-p} + \eta_t \tag{2}$$

gdzie

$$\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon),\ \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta).$$

W szczególnym przypadku, gdy $p = 0$ oraz $\eta_t \sim NID(\mu, \sigma_\eta)$, mamy do czynienia z modelem autoregresyjnym ze zmiennym parametrem rzędu pierwszego (RCA(1)), który jest zaliczany do klasy modeli z niejednorodną wariancją.

1. Model RCA

Niech dany będzie proces RCA(1,1) opisany równaniami

$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3}$$

$$\beta_t = \alpha_1 \beta_{t-1} + \eta_t \tag{4}$$

gdzie

$$\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon),\ \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta).$$

Dokonując odpowiednich podstawień, równania (3) i (4) można zastąpić równaniem:

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_1^k \eta_{t-i-k} \right) \right) \varepsilon_{t-j}\ . \tag{5}$$

Własności procesu autoregresyjnego rzędu pierwszego opisanego równaniem (4) są następujące:

$$E(\beta_t) = 0 \tag{6}$$

$$\operatorname{var}(\beta_t) = \frac{\sigma_\eta^2}{1-\alpha_1^2} = \sigma_\beta^2 \quad \text{przy założeniu } |\alpha_1| < 1 \tag{7}$$

$$\mathrm{cov}(\beta_t \beta_{t-s}) = \alpha_1^s \sigma_\beta^2 \tag{8}$$

zaś procesu RCA(1,1)

$$E(y_t) = 0 \tag{9}$$

$$\mathrm{var}(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\sigma_\beta^2} \text{ przy założeniu } \sigma_\beta^2 < 1 \tag{10}$$

$$\mathrm{cov}(y_t y_{t-s}) = 0\,. \tag{11}$$

Zatem proces RCA(1,1) charakteryzuje się zerową średnią, zerowymi kowariancjami oraz wariancją, która jest funkcją parametru α_1 i wariancji składnika losowego η_t. Łatwo wykazać, że jeśli $|\alpha_1| < 1-\sigma_\eta^2$, to istnieje skończona wariancja procesu y_t. Uogólniając dla modelu RCA(1,*p*), otrzymujemy:

$$E(y_t) = 0 \tag{12}$$

$$\mathrm{var}(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 f\left(\alpha_1, ..., \alpha_p, \sigma_\eta^2\right) \tag{13}$$

$$\mathrm{cov}(y_t y_{t-s}) = 0\,.$$

Model RCA(1,*p*) można zapisać w postaci modelu przestrzeni stanów (SS):

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{G}\eta_t\,, \tag{14}$$

$$y_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \varepsilon_t\,, \tag{15}$$

gdzie

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \beta_t \\ \beta_{t-1} \\ ... \\ \beta_{t-p+1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} y_{t-1} & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Modelu opisany równaniami (14)-(15) jest połączeniem modelu SS ze stałymi parametrami (równanie stanu) oraz modelu SS ze zmiennymi parametrami (równanie wyjścia). Zatem do estymacji parametrów modelu

RCA można zastosować metodę największej wiarygodności wykorzystującą filtr Kalmana.

Niech parametr procesu autoregresyjnego rzędu pierwszego będzie opisany poprzez proces AR(1) ze stałą (średnia różna od zera). Wówczas proces RCA(1,1) ma postać:

$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{16}$$

$$\beta_t = \alpha_0 + \alpha_1 \beta_{t-1} + \eta_t \tag{17}$$

gdzie

$$\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon),\ \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta).$$

Proces RCA(1,1) ze stałą, podobnie jak proces RCA(1,1) bez stałej, można zapisać w postaci:

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{j-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_1^k(\alpha_0 + \eta_{t-i-k})\right)\right)\varepsilon_{t-j}\ . \tag{18}$$

Jeżeli $|\alpha_1| < 1$, to własności procesu opisanego równaniami (16) i (17) są następujące:

$$E(\beta_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \tag{19}$$

$$\operatorname{var}(\beta_t) = \frac{\sigma_\eta^2}{1-\alpha_1^2} = \sigma_\beta^2 \tag{20}$$

$$\operatorname{cov}(\beta_t \beta_{t-s}) = \left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)^2 + \alpha_1^s \sigma_\beta^2 \tag{21}$$

zaś dla procesu RCA(1,1) ze stałą:

$$E(y_t) = 0 \tag{22}$$

$$\operatorname{var}(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\sigma_\beta^2}\ \text{, przy założeniu } \sigma_\beta^2 < 1, \tag{23}$$

$$\operatorname{cov}(y_t y_{t-s}) = \left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)^s \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\sigma_\beta^2}\text{, przy założeniu } \sigma_\beta^2 < 1. \tag{24}$$

Zatem proces RCA(1,1) ze stałą ma podobnie własności jak proces RCA(1,1) bez stałej z wyjątkiem kowariancji, która w tym przypadku jest funkcją parametrów α_0, α_1 i wariancji składnika losowego η_t.

Model RCA(1,*p*) opisany równaniami (16) i (17) można zapisać w postaci modelu przestrzeni stanów (SS):

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{E} + \mathbf{G}\eta_t, \tag{25}$$

$$y_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \tag{26}$$

gdzie

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \beta_t \\ \beta_{t-1} \\ \dots \\ \beta_{t-p+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} y_{t-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Różnica postaci modelu przestrzeni stanów, w stosunku do modelu RCA bez stałej, występuje tylko w równaniu stanu. W przypadku modelu RCA(1,*p*) ze stałą, należy dodać w równaniu (14) jedną macierz.

2. Identyfikacja własności modelu RCA za pomocą symulacji

W celu zilustrowania własności RCA oraz przeprowadzono eksperyment symulacyjny. Wygenerowano 100 szeregów po 500 obserwacji każdy. Dla każdego z wygenerowanych szeregów przeprowadzono analizę funkcji autokorelacji (ACF) oraz funkcji autokorelacji cząstkowej (PACF), wyznaczono wartość średnią, odchylenie standardowe, współczynniki skośności, kurtozy oraz wartości statystyk: Boxa-Ljunga, Engla ARCH, DF, McLeoda i Li. Wybrane wyniki zawarte są w tablicach 1-4.

Procesy generujące dane dla poszczególnych przypadków mają postać:

Model I – AR(1) (27)

$$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$$

gdzie $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$,

Model II – RCA(1,1) (28)

$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\beta_t = 0.3\beta_{t-1} + \eta_t$$

gdzie $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, $\eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta)$

MODEL III – RCA(1,2) (29)

$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\beta_t = 0.4\beta_{t-1} - 0.1\beta_{t-2} + \eta_t$$

gdzie $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, $\eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta)$

MODEL IV – RCA(1,3) (30)

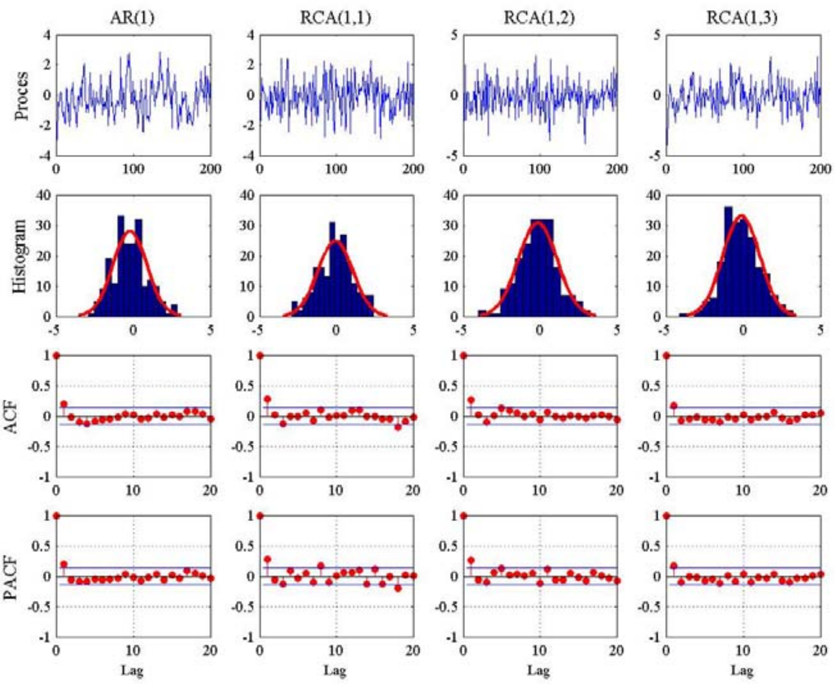
$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\beta_t = 0.5\beta_{t-1} - 0.3\beta_{t-2} + 0.1\beta_{t-3} + \eta_t$$

gdzie $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, $\eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta)$

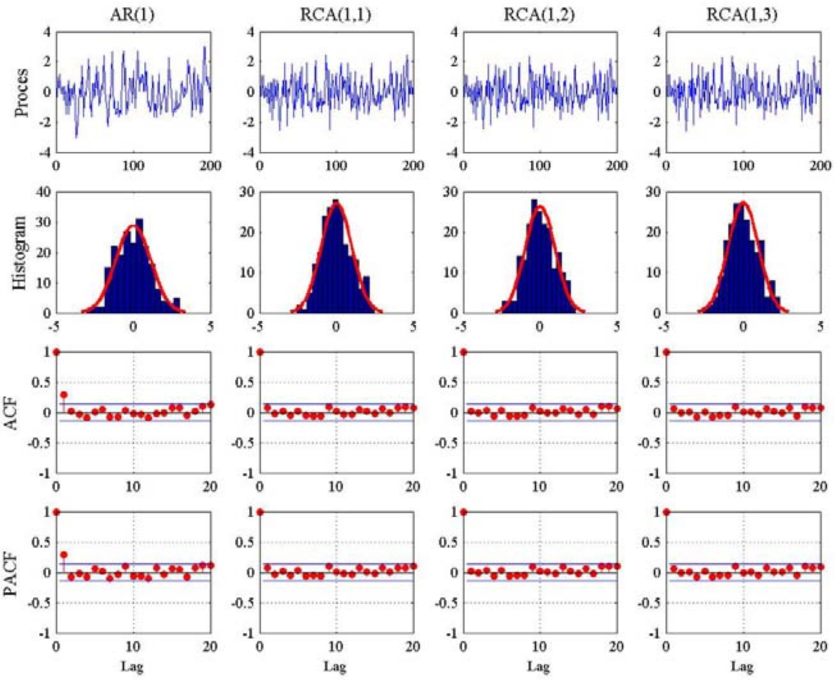
Przykładowe realizacje przedstawiono na rysunku 1 i 2.

Rys. 1 Przykładowe realizacje procesów ($\sigma_\eta = 0.6$) i ich charakterystyki



Źródło: Opracowanie własne

Rys. 2 Przykładowe realizacje procesów ($\sigma_\eta = 0.1$) i ich charakterystyki



Źródło: Opracowanie własne

Poniżej przedstawiono niektóre z uzyskanych wyników statystyk opisowych oraz testów statystycznych.

Tablica 1. Własności statystyczne procesów dla $\sigma_\eta = 0.6$

	Średnia			Odchylenie Standardowe		
	min	max	śr	min	max	Śr
AR(1)	-0,2557	0,2564	0,0047	1,0498	1,2581	1,1483
RCA(1,1)	-0,1562	0,1940	0,0084	1,1266	1,9383	1,3150
RCA(1,2)	-0,1574	0,1652	-0,0006	1,1399	1,6256	1,3087
RCA(1,3)	-0,2183	0,1841	-0,0035	1,2050	1,9144	1,4143
	Skośność			Kurtoza		
	min	max	śr	min	max	Śr

AR(1)	-0,3061	0,2169	0,0061	2,5616	3,6315	2,9539
RCA(1,1)	-1,3593	3,4923	0,0437	2,7211	58,4964	5,7056
RCA(1,2)	-0,9876	1,3257	-0,0270	2,6385	29,0032	4,5747
RCA(1,3)	-1,6010	2,5397	-0,0395	2,9308	21,5053	6,1708

Źródło: Opracowanie własne

Tablica 2. Własności statystyczne procesów dla $\sigma_\eta = 0.1$

	Średnia			Odchylenie Standardowe		
	min	max	śr	min	max	Śr
AR(1)	-0,2688	0,2378	0,0024	1,0513	1,2648	1,1489
RCA(1,1)	-0,1344	0,1242	0,0014	0,9161	1,0860	0,9992
RCA(1,2)	-0,1393	0,1242	0,0010	0,9227	1,0851	1,0001
RCA(1,3)	-0,1395	0,1190	0,0010	0,9111	1,0884	1,0002
	Skośność			Kurtoza		
	min	max	śr	min	max	Śr
AR(1)	-0,2577	0,3006	0,0009	2,5613	3,6346	2,9844
RCA(1,1)	-0,3191	0,2931	0,0074	2,5452	4,1263	2,9928
RCA(1,2)	-0,2964	0,2814	0,0027	2,4900	4,0049	2,9771
RCA(1,3)	-0,3115	0,2785	0,0060	2,5121	4,0663	2,9771

Źródło: Opracowanie własne

Tablica 3. Wyniki testów procesów dla $\sigma_\eta = 0.6$

Test	Boxa-Ljunga				Engla ARCH test			DF	McLeoda i Li	
	1	2	3	4	1	2	4		1	4
AR(1)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990	1,000	1,000	0,990
RCA(1,1)	0,370	0,640	0,630	0,560	1,000	1,000	0,980	1,000	1,000	0,980
RCA(1,2)	0,170	0,190	0,190	0,180	1,000	1,000	0,990	1,000	1,000	0,990
RCA(1,3)	0,410	0,890	0,860	0,810	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Liczba oznacza prawdopodobieństwo odrzucenia H0

Źródło: Opracowanie własne

Tablica 4. Wyniki testów procesów dla $\sigma_\eta = 0.1$

Test	Boxa-Ljunga				Engla ARCH test			DF	McLeoda i Li	
	1	2	3	4	1	2	4		1	4

AR(1)	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990	0,980	0,970	1,000	0,990	0,970
RCA(1,1)	0,050	0,040	0,020	0,030	0,020	0,050	0,070	1,000	0,020	0,070
RCA(1,2)	0,060	0,040	0,020	0,020	0,020	0,040	0,050	1,000	0,020	0,050
RCA(1,3)	0,040	0,040	0,050	0,030	0,000	0,030	0,060	1,000	0,000	0,050

Źródło: Opracowanie własne

Analiza funkcji ACF oraz funkcji PACF oraz przedstawionych powyżej wyników pozwoliła na sformułowanie następujących wniosków:

1. wartości współczynników ACF i PACF zależą od wartości wariancji reszt modelu (2) w procesie generującym parametr, przy czym dla wariancji $\sigma_\eta^2 = 0.01$ prawie wszystkie wartości współczynników ACF i PACF są statystycznie nieistotne (por. tablica 4),
2. dla kwadratów realizacji widoczna jest jeszcze większa zależność pomiędzy istotnością wartości współczynników ACF i PACF a wartością wariancji resztowej. Wyższa wartość wariancji składnika losowego z równania (2), to występowanie efektu ARCH, nieliniowość procesu[3], podwyższona kurtoza
3. dla wyższych wartości wariancji składnika losowego $\left(\sigma_\eta^2 = 0.36\right)$ własności statystyczne procesu RCA są podobne jak własności statystyczne procesów biliniowych,
4. za pomocą przedstawionych własności i testów istnieje możliwość rozróżnienia pomiędzy procesem AR a procesem RCA,
5. w przypadkach granicznych, gdy $|\alpha_1| \approx 1-\sigma_\eta^2 \quad \wedge \quad |\alpha_1| < 1-\sigma_\eta^2$ autokorelacja występuje w większej ilości realizacji.

Dla modelu RCA ze stałą wyniki również ulegają zmianie. Powtórzono eksperyment symulacyjny dodając w modelach RCA stałą w równaniu (2) wynoszącą 0.5. Wyniki przedstawiono w tablicach 5-8. W tym przypadku wyniki testów nie zależą od wartości wariancji składnika losowego. Od wariancji resztowej zależy tylko wartość wariacji procesu, co jest zgodne z równanie (10).

Tablica 5. Własności statystyczne procesów ze stałą dla $\sigma_\eta = 0.6$

	Średnia	Odchylenie Standardowe

[3] według testu McLeoda i Li.

	min	Max	śr	min	max	Śr
AR(1)	-0,1706	0,2251	0,0077	1,0372	1,2790	1,1537
RCA(1,1)	-5,7576	35,2537	0,6323	1,8527	377,9982	11,7807
RCA(1,2)	-0,6963	0,7809	-0,0062	1,6674	7,7246	2,8416
RCA(1,3)	-3,0864	8,0683	0,0663	1,7602	41,8717	6,0464
	Skośność			Kurtoza		
	min	max	śr	min	max	Śr
AR(1)	-0,3564	0,2775	0,0028	2,5657	3,6861	2,9401
RCA(1,1)	-11,2392	12,6147	0,3667	6,0631	183,7570	40,9339
RCA(1,2)	-11,4864	7,1902	0,1418	4,1660	159,1959	19,8497
RCA(1,3)	-11,2951	12,6315	-0,1558	4,7521	182,3461	45,2669

Źródło: Opracowanie własne

Tablica 6. Własności statystyczne procesów ze stałą dla $\sigma_\eta = 0.1$

	Średnia			Odchylenie Standardowe		
	min	max	śr	min	max	Śr
AR(1)	-0,2279	0,2067	0,0062	1,0222	1,2607	1,1504
RCA(1,1)	-0,3651	0,3768	0,0112	1,2168	1,7083	1,4435
RCA(1,2)	-0,4106	0,3585	0,0112	1,2222	1,6775	1,4292
RCA(1,3)	-0,4815	0,3769	0,0092	1,2408	1,7366	1,4510
	Skośność			Kurtoza		
	min	max	śr	min	max	Śr
AR(1)	-0,2856	0,2874	0,0048	2,6141	4,0179	2,9690
RCA(1,1)	-0,4266	0,7371	0,0001	2,5037	5,7267	3,1062
RCA(1,2)	-0,3432	0,6114	-0,0079	2,4723	4,9328	3,0367
RCA(1,3)	-1,0415	0,5673	-0,0034	2,4815	6,6124	3,1519

Źródło: Opracowanie własne

Tablica 7. Wyniki testów procesów ze stałą dla $\sigma_\eta = 0.6$

Test	Boxa-Ljunga				Engla ARCH test			DF	McLeoda i Li	
	1	2	3	4	1	2	4		1	4
AR(1)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,980	1,000	1,000	0,980
RCA(1,1)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
RCA(1,2)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
RCA(1,3)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Źródło: Opracowanie własne

Tablica 8. Wyniki testów procesów ze stałą dla $\sigma_\eta = 0.1$

Test	Boxa-Ljunga				Engla ARCH test			DF	McLeoda i Li	
	1	2	3	4	1	2	4		1	4
AR(1)	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990	0,980	0,980	1,000	0,990	0,970
RCA(1,1)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
RCA(1,2)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
RCA(1,3)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Źródło: Opracowanie własne

3. Podsumowanie

Przeprowadzona analiza własności modeli RCA(1,*p*) wykazała, że modele te charakteryzują się średnią zero, wariancją zależną od wartości parametrów modelu opisującego proces parametru i wariancji składników resztowych w równaniach (1) i (2). Wartość kowariancji w zależności od typu RCA(1,*p*) (bez stałej czy ze stałą) wynosi zero lub jest od zera różna i zależy od wartości parametrów modelu opisującego proces parametru i wariancji składników resztowych w równaniach (1) i (2). Na podstawie wyników eksperymentu symulacyjnego można stwierdzić, iż niektóre modele RCA(1,*p*), ze względu na swoje własności, mogą opisywać stopy zwrotu cen akcji. Problem wykorzystania modeli RCA(1,*p*) w ekonomicznych szeregach czasowych nie jest w literaturze rozpoznany i wymaga jeszcze dalszych pogłębionych studiów.

LITERATURA

1. Grager C. W. J., Swanson N. R. (1997), "An introduction to stochastic unit-root process", *Journal of Econometrics*, 80.
2. Harvey A. C., (1990), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.
3. Leybourne S. J., McCabe B. P. M., Mills T. C. (1996), "Randomized unit root processes for modeling and forecasting financial time series: theory and applications", *Journal of Forecasting*, 15.
4. Leybourne S. J., McCabe B. P. M., Tremayne A. R., (1996), "Can Economic Time Series Be Differenced Stationatity?", *American Statistical Association Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 14, No. 4.
5. Lütkepohl H., (1991), *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.

6. Nicholls D. F., Quinn B. G., (1982), *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*, Springer-Verlag, New York.
7. Osińska M. (2004), "Procesy zawierające stochastyczne pierwiastki jednostkowe - identyfikacja i zastosowania", *AUNC* 368, Toruń.

Joanna Górka

RANDOM-COEFFICIENT AUTOREGRESSIVE PROCESSES

Summary

In the paper we present stochastic process which is called random-coefficient autoregressive processes. In this article we show analysis of assumption of random-coefficient autoregressive processes order one, where autoregressive model describe the coefficient. Advantage of this class of models rely on possibility description nonlinear mechanism in the data.