

Witold Orzeszko

Katedra Ekonometrii i Statystyki

## **Modele chaotyczne w ekonomii**

### **Streszczenie**

W niniejszym artykule rozważono kwestię wykorzystania chaotycznych systemów dynamicznych do modelowania zjawisk ekonomicznych. Przedstawiono przesłanki uzasadniające zainteresowanie ekonomistów teorią chaosu i zaprezentowano związki z innymi koncepcjami modelowania. Omówiono istotę modeli chaotycznych, ich wady i zalety oraz płynące z nich wnioski. Dodatkowo dokonano zestawienia wybranych chaotycznych modeli zjawisk ekonomicznych, opublikowanych w światowej literaturze ekonomicznej.

### **Wprowadzenie**

Pierwsze nieliniowe modele deterministyczne pojawiły się w ekonomii w połowie XX wieku. Opierają się one na założeniu, że źródłem obserwowanych w rzeczywistości ekonomicznej fluktuacji i niestabilności mogą nie być zakłócenia zewnętrzne, lecz czynniki endogeniczne. Szczególnym przypadkiem tej klasy modeli są chaotyczne systemy dynamiczne, których ewolucja cechuje się obecnością nieregularnych cykli o zmiennym okresie i amplitudzie oraz jest bardzo trudno odróżnialna od losowej. Specyficzne własności chaotycznych systemów dynamicznych zaowocowały w ciągu ostatnich 20-30 lat wzrostem zainteresowania teorią chaosu wśród ekonomistów i powstaniem wielu teoretycznych modeli, generujących chaos.

Celem niniejszej pracy jest prezentacja ekonomicznych aspektów zastosowania chaotycznych systemów dynamicznych do opisu procesów ekonomicznych a także podsumowanie obecnego stanu wykorzystania teorii chaosu w teorii ekonomii.

## Nieliniowe systemy dynamiczne w opisie zjawisk ekonomicznych

Epoką, w której nastąpił gwałtowny rozwój nauk naturalnych było oświecenie. Wielu ówczesnych badaczy było jednocześnie filozofami. Nic więc dziwnego, że dominujący nurt filozoficzny oświecenia – racjonalizm, zasadniczo wpłynął na kształtujące się w tym okresie paradygmaty nauk empirycznych<sup>1</sup>. Racjoniści głosili wiarę w możliwość naukowego poznania praw rządzących światem i w konsekwencji ich opanowania. Dokonywane na gruncie fizyki i astronomii odkrycia potwierdzały, że rzeczywiście istnieją pewne uniwersalne, a jednocześnie stosunkowo proste prawa, umożliwiające opisanie i prognozowanie zjawisk fizycznych. Deterministyczny charakter zjawisk naturalnych wydawał się tak oczywisty, że uważano go za podstawową własność procesów zachodzących w przyrodzie. Stąd też ideałem nauki stał się jednoznaczny opis świata rządzonego przez deterministyczne prawa<sup>2</sup>. Jednak znalezienie ich i opisanie okazywało się niekiedy zadaniem zbyt trudnym. Istotnym problemem w wielu wypadkach była duża liczba składników układów, problemy z ich obserwacją oraz trudność z rozwiązywaniem układów równań różniczkowych, opisujących ich dynamikę<sup>3</sup>. Z tego powodu do analizy skomplikowanych zjawisk naturalnych zaczęto wykorzystywać rachunek prawdopodobieństwa. Okazało się, że dzięki metodom statystycznym możliwe jest scharakteryzowanie oraz prognozowanie złożonych procesów, szczególnie takich, w których występowała duża liczba niezależnych od siebie czynników<sup>4</sup>. Tak traktowana statystyka uważana była za metodę pomocniczą, w niedokładny sposób opisującą zdeterminowany świat, która, choć w praktyce przydatna, w istocie nie ujmuje prawdziwej natury zjawisk. W tym rozumieniu nie było sprzeczności pomiędzy ujęciem deterministycznym a statystycznym, gdyż dotyczyły one różnych poziomów poznania<sup>5</sup>.

Wzorem dla wczesnych ekonomistów, podobnie jak i dla innych badaczy zjawisk empirycznych, była fizyka i jej deterministyczne prawa mechaniki klasycznej. Przykładem poglądów ekonomistów klasycznych na temat determinizmu prawidłowości ekonomicznych była opinia Milla wyrażona w 1844 r.: „Nie ma *prawa i odstępstwa* od niego – prawa zachodzącego w dziewięćdziesięciu dziewięciu przypadkach i odstępstwa w jednym. Są dwa

---

<sup>1</sup> Por. Prokhorov A.B. [2001], *Nonlinear Dynamics and Chaos Theory [in Economics: a Historical Perspective]*, *maszynopis*, EC 816, s. 4.

<sup>2</sup> Tempczyk M. [1995], *Świat harmonii i chaosu*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa, s. 198-199.

<sup>3</sup> Tempczyk M., *op. cit.*, s. 201.

<sup>4</sup> *Ibidem*, s. 199-200.

<sup>5</sup> *Ibidem*, s. 204-205.

prawa, z których każde może działać we wszystkich stu przypadkach, zaś zachodzące zdarzenie jest efektem ich współdziałania.”<sup>6</sup> Oznacza to, że nie trzeba odwoływać się do pojęcia prawdopodobieństwa, gdyż istnieje możliwość znalezienia prawa uniwersalnego (o charakterze deterministycznym) uwzględniającego współdziałające prawidłowości. Z drugiej strony zauważano jednak, że systemy ekonomiczne mogą podlegać działaniu dużej ilości czynników, a przez to bywają bardziej złożone niż niektóre układy fizyczne. Stanowisko to wyraził Marshall stwierdzając, że zależności ekonomiczne nie przypominają prostych i precyzyjnych praw grawitacji, lecz zdają się być bardziej podobne np. do skomplikowanych i trudniejszych do przewidywania praw rządzących przyływami<sup>7</sup>. Ponadto zwrócił on uwagę na fakt, że złożone i niepewne zachowanie uczestników rynków, z uwagi na naturę ludzkiego postępowania, można opisać jedynie w niedokładny sposób, a formułowane reguły bywają zawodne. Sposobem na ominięcie tych komplikacji była stosowana przez Marshalla analiza cząstkowa, polegająca na badaniu zależności pomiędzy wybranymi czynnikami przy założeniu stałości pozostałych<sup>8</sup>. W tym celu Marshall wyodrębniał zmienne endogeniczne systemu, pozostałe traktując jako dane czynniki egzogeniczne, zaś przedmiotem badania były związki pomiędzy zmiennymi endogenicznymi, niekiedy poszerzone o wpływ wybranych czynników egzogenicznych, jednak generalnie bez budowania obrazu dynamiki całego złożonego systemu<sup>9</sup>.

Zrezygnowanie z klauzuli „*ceteris paribus*” nie daje gwarancji zgodności modelu ekonomicznego z rzeczywistością, bowiem niezwykle trudne lub wręcz niemożliwe jest pełne określenie uwarunkowań zajścia opisywanych przez nie zdarzeń. Nigdy bowiem nie ma pewności, czy nie istnieje jakaś nieuwzględniona okoliczność, bez której mimo spełnienia określonych dotąd warunków pojawienia się następstwa, analizowany skutek jednak nie zajdzie. Oznacza to, że „w sferze zjawisk ekonomicznych nigdy nie będziemy mogli z pewnością powiedzieć, czy w wyniku zajścia pewnego układu warunków pojawi się, czy nie pojawi, pewne inne zjawisko jako ich następstwo.”<sup>10</sup> Powyższa cecha jest jednym z powodów, dla których formułowane prawa ekonomiczne uznaje się za stochastyczne.

Nieco inną kwestią jest, czy same zjawiska ekonomiczne mają charakter deterministyczny. Jednak, jak trafnie ujmuje to Z. Czerwiński: „Z praktycznego punktu widzenia jest obojętne, czy [deterministyczne; *przyp. aut.*] ilościowe prawa ekonomiczne

---

<sup>6</sup> Tłum. wł. za: Prokhorov A.B., *op. cit.*, s. 7.

<sup>7</sup> Prokhorov A.B., *op. cit.*, s. 7.

<sup>8</sup> Czerwiński Z. [1992], *Dylematy ekonomiczne*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, s. 188.

<sup>9</sup> Prokhorov A.B., *op. cit.*, s. 7.

<sup>10</sup> Czerwiński Z., *op. cit.*, s. 189-190.

istnieją, lecz są tak złożone, że nie potrafimy ich wykryć, czy też że ich w ogóle nie ma. W obu przypadkach nie umiemy wskazać takich przekształceń układu zmiennych egzogenicznych, które by dokładnie wyznaczały układ zmiennych endogenicznych, i jakkolwiek (praktycznie wyobrażalne) przekształcenie przyjmiemy, zawsze empirycznie stwierdzamy odchylenia między wartościami tych przekształceń na zaobserwowanych wartościach zmiennych egzogenicznych a zaobserwowanymi wartościami zmiennych endogenicznych. (...) Czy źródłem ich [tzn. zakłóceń losowych; *przyp. aut.*] jest 'indeterminizm świata zjawisk ekonomicznych', czy raczej niedostateczne rozpoznanie tego świata, na ten temat ekonometryk – jeżeli nie chce być filozofem – wypowiadać się nie musi."<sup>11</sup> To pragmatyczne rozumowanie wydaje się być przekonującym uzasadnieniem stosowania modeli stochastycznych do opisu zjawisk ekonomicznych.

Jednak na wczesnym etapie rozwoju ekonomii wśród rozważanych modeli dominowały deterministyczne, a wśród nich najprostsze, tzn. liniowe. Założenie o liniowym charakterze deterministycznego systemu w zasadzie implikuje istnienie pojedynczego punktu równowagi, do którego ewoluuje w czasie system. Dzieje się tak dlatego, że pozostałymi zidentyfikowanymi przez matematyków zachowaniami granicznymi systemów liniowych są rozbieżność (która nie ma sensownej interpretacji ekonomicznej, gdyż np. oznacza upadek gospodarki lub prowadzi do ujemnych cen<sup>12</sup>) oraz cykl graniczny, który jest jednak z punktu widzenia własności matematycznych modelu sytuacją bardzo mało prawdopodobną. Z tego powodu modele liniowe w swoich podstawach wyraźnie nawiązują do paradygmatu ekonomii klasycznej o istnieniu stabilnego punktu równowagi.

Istotnym powodem krytyki deterministycznych modeli liniowych była zauważona na początku XX w. ich niezgodność z obserwacjami, polegająca na niemożności generowania typowych dla wielu zjawisk ekonomicznych nieokresowych cykli (np. gospodarczych) oraz oscylacji o nieregularnych amplitudach. Na przełomie lat 30. i 40. zaproponowano rozwiązanie tego problemu, polegające na dodaniu do liniowego modelu składnika losowego, mającego reprezentować m.in. zakłócenia o charakterze egzogenicznym, tj. czynniki polityczne, decyzje z zakresu polityki gospodarczej państwa, zmiany technologiczne, itp.<sup>13</sup> Postępując zgodnie z tą filozofią zakłada się, że immanentne siły opisujące procesy ekonomiczne zachowują się regularnie, tzn. powodują zbieżność procesu do punktu

---

<sup>11</sup> *Ibidem*, s. 204.

<sup>12</sup> Bullard J.B., Butler A. [1991], Nonlinearity and Chaos in Economic Models: Implications for Policy Decisions, *maszynopis* 1991-002B, The Federal Reserve Bank of St. Louis., s. 5.

<sup>13</sup> Por. np. Grandmont J.-M., Malgrange P. [1986], Nonlinear Economic Dynamics: Introduction, *Journal of Economic Theory*, vol. 40, s. 3, Prokhorov A.B., *op. cit.*, s. 10.

równowagi, natomiast powodem obserwowanych nieregularności w zachowaniu szeregów czasowych są czynniki egzogeniczne o charakterze losowym, które zwykle nie mają czysto ekonomicznego charakteru. Za twórców tej filozofii, która w ekonometrii stała się dominującą w analizie cykli ekonomicznych, uważa się Eugeniusza Słuckiego i Ragnara Frischa<sup>14</sup>.

Oczywiście model ekonomiczny z samej swej natury jest tylko niedoskonałym opisem rzeczywistych procesów. Dlatego też zrozumiałe jest, a nawet pożądane, aby w modelu rozważać tylko te czynniki, które odgrywają istotną rolę w kształtowaniu się zjawiska. Pozostałe zmienne objaśniające, które w niewielkim stopniu wpływają na zmienną objaśnianą, można traktować jako przejaw działania czynników przypadkowych i jako takie mogą one zostać uznane za składnik losowy. Jednakże wątpliwy wydaje się model, który z góry pomija zmienne istotnie wpływające na jego własności. Dodatkowo stosowanie koncepcji składnika losowego może prowadzić do przyjęcia nienaukowej postawy, wyrażającej się w zbyt pochopnym zaakceptowaniu własnej niewiedzy na temat mechanizmów kształtowania się zjawiska, bez próby ich głębszej analizy. Poprzestanie na nazwaniu czynnikiem losowym skomplikowanej czy pozornie przypadkowej przyczyny może spowodować niepoznanie tego, co w istocie jest poznawalne.

Stochastyczne modele liniowe są obecnie dominującym narzędziem analizy ekonomicznych szeregów czasowych. W wielu wypadkach ich stosowanie uzasadnia się dobrym dopasowaniem do rzeczywistych danych. Jednak należy postawić pytanie, czy sama ocena dopasowania nie prowadzi do nadużywania modeli określonej klasy? Problem ten ilustruje poniższy przykład<sup>15</sup>. Rozpatrzmy nieliniowy model Hicksa z „podłogą” (ang. *floor*) i „sufitem” (ang. *ceiling*):

$$\begin{aligned} C_t &= C_0 + c \cdot Y_{t-1} \\ I_t &= \max\{I_f, I_0 + \beta \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2})\}, \\ Y_t &= \min\{Y_c, C_t + I_t\}, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie współczynnik  $c$  symbolizuje krańcową skłonność do konsumpcji, zaś  $\beta$  - akcelerator. Zmienna  $I_f$  jest dolnym ograniczeniem poziomu inwestycji, zaś  $Y_c$  jest górną granicą produkcji. Jeśli gospodarka ewoluje w przedziale pomiędzy „podłogą” i „sufitem”, wówczas opisywana jest przez równanie:

<sup>14</sup> Barnett W.A., Medio A., Serletis A. [1997], *Nonlinear And Complex Dynamics In Economics*, *maszynopis*, Washington University, s. 3.

<sup>15</sup> Lorenz H.-W. [1989], *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, s. 29.

$$Y_t = C_0 + I_0 + (c + \beta)Y_{t-1} - \beta Y_{t-2}. \quad (2)$$

W oparciu o model Hicksa przeprowadzono następujący eksperyment: przyjęto wartości parametrów powodujące eksplodujące oscylacje wielkości produkcji:

$$Y_t = 25,0 + (0,75 + 1,5)Y_{t-1} - 1,5Y_{t-2}, \quad (3)$$

a następnie do wygenerowanego z powyższego modelu szeregu czasowego dopasowano stochastyczny model liniowy postaci:

$$Y_t = A + (c + \beta)Y_{t-1} - \beta Y_{t-2} + u_t. \quad (4)$$

Otrzymano następujący model<sup>16</sup>:

$$Y_t = 28,5 + (0,713 + 0,887)Y_{t-1} - 0,887Y_{t-2} \quad (5)$$

$$(R^2 = 0,92, DW = 2,17)$$

Prowadzi on do nieprawdziwego wniosku o stabilnym charakterze gospodarki ( $\beta < 1$ ), podczas gdy w istocie szereg został wygenerowany z modelu niestabilnego ( $\beta > 1$ ). Z punktu widzenia ekonomii pozytywnej jest więc bezwartościowy. Przykład ten pokazuje, że koncepcja dodawania szumu do modelu liniowego może prowadzić do błędnego rozpoznania mechanizmu badanego zjawiska ekonomicznego. Wynika stąd postulat, aby we wstępnym etapie procesu modelowania dokonywać identyfikacji własności danych, umożliwiającej dobór właściwej klasy modeli.

Alternatywą dla stochastycznych modeli liniowych w opisie zjawisk ekonomicznych są nieliniowe systemy dynamiczne. Dzięki możliwości generowania atraktorów cechują się one szeroką gamą potencjalnych zachowań granicznych. W szczególności, w przeciwieństwie do układów liniowych, wiele z nich generuje cykle. Zwolennicy stosowania nieliniowych systemów dynamicznych wywodzą się m.in. z grupy ekonomistów, kwestionujących paradygmat ekonomii klasycznej o zdążaniu systemu do stabilnego punktu równowagi. Uznają oni tezę, że źródłem obserwowanych w rzeczywistości ekonomicznej fluktuacji i niestabilności mogą nie być zakłócenia zewnętrzne, lecz czynniki endogeniczne, które w związku z tym powinny zostać uwzględnione w modelu. Według tej filozofii, czynnik losowy w modelu nie gra zasadniczej roli, a zatem model jest deterministyczny. Warto podkreślić, że pierwsi badacze cykli ekonomicznych tj. Haberler, Hayek, Schumpeter czy Wicksell w

---

<sup>16</sup> Lorenz H.-W., *op. cit.* s. 29.

swoich teoriach odwoływali się właśnie do czynników endogenicznych jako przyczyn obserwowanej w gospodarce cykliczności<sup>17</sup>.

Nieliniowe modele deterministyczne stosowane są w ekonomii od połowy XX w<sup>18</sup>. Znanymi ich przykładami są modele Kaldora, Hicksa, Goodwina, Samuelsona, Harroda oraz Kaleckiego<sup>19</sup>. Za zwolenników wyjaśniania cykli jako efektu działania czynników endogenicznych uważa się przede wszystkim keynesistów oraz postkeynesistów, chociaż systemy nieliniowe stosowane są również i przez neoklasyków. Źródłem cykliczności we współcześnie konstruowanych nieliniowych modelach deterministycznych są najczęściej opóźnienia czasowe w reakcjach dostosowawczych agentów do sygnałów z rynku oraz wpływające na terażniejszość ich zmienne oczekiwania, dotyczące przyszłości systemu<sup>20</sup>.

Zastosowanie systemów nieliniowych do analizy zjawisk ekonomicznych jest naturalnym uzupełnieniem modelowania liniowego. Nie oznacza to jednak, że zawsze ma ono znaczącą przewagę. Wiele bowiem zależy od rodzaju nieliniowości, a czasem i od przedmiotu badania. Przykładowo, nieliniowości w systemie mogą być tak słabe, że aproksymowanie ich modelem liniowym nie prowadzi do istotnych błędów w poznaniu własności rzeczywistego procesu. Jednak podejście to może być dość ryzykowne, szczególnie w przypadku systemów wielowymiarowych, gdzie nawet pozornie niewielkie nieliniowości mogą zasadniczo wpływać na podstawowe własności modelu<sup>21</sup>. W efekcie wnioski płynące z modelu nieliniowego i aproksymującego go modelu liniowego mogą być całkowicie rozbieżne<sup>22</sup>.

Analiza skomplikowanych własności nieliniowych systemów dynamicznych unaoczniała ekonomistom nieprawdziwość niektórych stereotypów, dotyczących mechanizmów regulujących procesy ekonomiczne. Przykładowo: wykazano, że ingerencja państwa w gospodarkę, polegająca na stymulacji jej wzrostu poprzez zwiększenie wydatków w okresie stagnacji oraz ich zmniejszaniu w okresie wzrostu, może paradoksalnie prowadzić do zwiększenia amplitudy wahań koniunkturalnych<sup>23</sup>. Podobnie: spekulacyjne działania uczestników rynku, polegające na dokonywaniu zakupów, gdy cena towaru jest niska (prowadzące do wzrostu ceny) i jej sprzedaży, gdy jest wysoka (impuls do spadku ceny), wcale nie muszą prowadzić do ustalenia się ceny na poziomie równowagi. Wręcz przeciwnie, ich działania mogą powodować wzrost amplitudy fluktuacji cen towaru. W obu przypadkach

---

<sup>17</sup> Grandmont J.-M., Malgrange P., *op. cit.*, s. 3.

<sup>18</sup> Prokhorov A.B., *op. cit.*, s. 12.

<sup>19</sup> Por. Grandmont J.-M., Malgrange P., *op. cit.*, s. 3, Prokhorov A.B., *op. cit.*, s. 13.

<sup>20</sup> Grandmont J.-M., Malgrange P., *op. cit.*, s. 4.

<sup>21</sup> Lorenz H.-W., *op. cit.*, s. 27.

<sup>22</sup> Por. Bullard J.B., Butler A., *op. cit.*, s. 3.

<sup>23</sup> Baumol W.J., Banhabib J. [1989], Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications, *Journal of Economic Perspectives*, vol. 3, no. 1, s. 80.

powodem występowania tych paradoksalnych reakcji są opóźnienia czasowe w dostosowaniu się podmiotów do określonych sygnałów.

## **Chaotyczne systemy dynamiczne w teorii ekonomii**

Wczesne nieliniowe modele cykli gospodarczych były krytykowane za ich niezgodność z rzeczywistością. Ich dynamika była zbyt regularna, aby można było przyjąć, że są w stanie dobrze opisać złożony charakter realnych systemów ekonomicznych. Z tego powodu zainteresowanie wśród ekonomistów wzbudziły własności chaotycznych systemów dynamicznych i generowanych przez nie szeregów czasowych. Spośród modeli nieliniowych to właśnie systemy chaotyczne wyróżniają się największym bogactwem potencjalnych zachowań. W szczególności systemy te mogą generować szeregi o zmiennym okresie i amplitudzie, które ze względu na swą złożoną ewolucję wydają się być losowe.

Możliwość zastosowania teorii chaosu w ekonomii została po raz pierwszy zasygnalizowana w 1975 r. przez Maya i Beddingtona<sup>24</sup>. Od tego momentu znaleziono chaos w wielu istniejących modelach zjawisk ekonomicznych oraz zbudowano nowe modele z dynamiką chaotyczną. Do identyfikacji chaosu w rozważanych systemach najczęściej wykorzystywano twierdzenie Li i Yorke'a (1975). W wielu pracach punktem wyjścia był pewien gotowy, deterministyczny model z czasem dyskretnym lub ciągłym, który po ewentualnych przekształceniach przyjmował postać równania różnicowego lub różniczkowego z chaosem. Niekiedy przekształcano model statyczny w taki sposób, aby otrzymać model dynamiczny, który następnie poddawano analizie<sup>25</sup>.

Niektórym istniejącym ekonomicznym modelom z chaosem można zarzucić, że sprawiają wrażenie, jakby konstruowane były pod kątem pewnych konkretnych twierdzeń ułatwiających identyfikację chaosu (np. wspomnianego twierdzenia Li i Yorke'a) lub były bezpośrednią aplikacją znanych na gruncie matematyki odwzorowań chaotycznych (np. odwzorowania logistycznego). W efekcie część z nich może nie być wystarczająco przekonująca dla ekonomisty, zaś rozważane wartości parametrów bywają czasami wątpliwe z punktu widzenia ich interpretacji ekonomicznej. Jednak z drugiej strony warto podkreślić, że założenia matematyczne, potrzebne do wygenerowania dynamiki chaotycznej, nie narzucają nienaturalnych z punktu widzenia teorii ekonomii własności systemów, tzn.

---

<sup>24</sup> Baumol W.J., Banhabib J., *op. cit.*, s. 80.

<sup>25</sup> Zawadzki H. [1996], *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego, Katowice, s. 188.



mechanizmy generujące chaos nie są same w sobie sprzeczne z prawami ekonomicznymi<sup>26</sup>. Ponadto udowodniono, że w modelach dwu- i więcej wymiarowych nawet słabe nieliniowości mogą generować chaos<sup>27</sup>. Z tego powodu lista ekonomicznych modeli z chaosem wciąż się powiększa, stając się jednocześnie teoretyczną podstawą do identyfikacji chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych.

Wiele chaotycznych modeli ekonomicznych odwołuje się do pojęcia „równowagi systemu”. Pojęcie to jest inaczej rozumiane z matematycznego i ekonomicznego punktu widzenia<sup>28</sup>. Dla matematyka jest to punkt równowagi, będący punktem stałym analizowanego odwzorowania. Ekonomisci przyzwyczajeni do myślenia w kategoriach modeli liniowych, dość często równowagę ekonomiczną systemu utożsamiają z matematycznym pojęciem równowagi. Typowe dla modeli liniowych istnienie pojedynczego, stabilnego stanu granicznego powoduje, że analiza ekonomicznych własności systemu staje się statyczna, gdyż zostaje sprowadzona do badania jego zachowania w punkcie równowagi. Tymczasem z ekonomicznego punktu widzenia równowaga systemu polega na spełnianiu pewnych nałożonych warunków o charakterze ekonomicznym, przykładowo - na zrównaniu wartości określonych zmiennych, np. popytu i podaży. W tym ujęciu nie można wykluczyć istnienia wielu stanów spełniających nałożone warunki, a wówczas o systemie ewoluującym pomiędzy takimi stanami będzie można powiedzieć, że pozostaje w równowadze ekonomicznej. Tak rozumiana „równowaga” staje się więc pojęciem dynamicznym. Nie jest zatem błędem logicznym mówienie o „chaotycznej równowadze” systemu, przez którą rozumieć się będzie sytuację, kiedy trajektoria ewolucji systemu jest chaotyczna<sup>29</sup>, a jednocześnie system pozostaje w równowadze ekonomicznej.

Typowa dla wielu modeli procesów ekonomicznych jest obecność parametrów. Przykładowo, w modelach wzrostu gospodarczego mogą one reprezentować narzędzia oddziaływania na gospodarkę, zaś celem analizy jest znalezienie takich ich wielkości, które prowadziłyby do optymalnej ścieżki wzrostu. Jeśli jednak analizowany model ma dynamikę chaotyczną, sprawa się zasadniczo komplikuje. Z jednej strony, modele deterministyczne dają z natury większe możliwości sterowania gospodarką, niż modele odwołujące się do idei zakłóceń zewnętrznych, gdyż endogeniczny charakter procesu umożliwia wykorzystanie narzędzi polityki fiskalnej czy pieniężnej, reprezentowanych w modelu w postaci

---

<sup>26</sup> Por. np. Bullard J.B., Butler A., *op. cit.*, s. 8.

<sup>27</sup> Brock W.A., Hommes C.H. [1997], *Models of Complexity in Economics and Finance*, *maszynopis*, University of Wisconsin, Madison, s.3.

<sup>28</sup> Por. Bullard J.B., Butler A., *op. cit.*, s. 8-10.

<sup>29</sup> Np. w sensie definicji Li i Yorke'a.

parametrów. Jednakże z drugiej strony, duża wrażliwość systemów chaotycznych na zmianę warunków początkowych powoduje niemożność przewidywania skutków decyzji gospodarczych w dłuższym horyzoncie czasowym. W efekcie nie jest możliwe wyznaczenie optymalnych wartości parametrów ani tym bardziej odpowiednie wyregulowanie odpowiadających im narzędzi oddziaływania na gospodarkę<sup>30</sup>. Można zatem powiedzieć, że z punktu widzenia możliwości praktycznego wykorzystania chaotycznych modeli ekonomicznych korzystna jest sytuacja, kiedy parametry znajdują się poza strefą chaosu. Znalezieniem takich stref zajmuje się teoria bifurkacji. Jednak zakres jej potencjalnych zastosowań w ekonomii wydaje się być dużo szerszy. Analiza bifurkacji modeli ekonomicznych wiąże się również z ciekawymi implikacjami natury teoretycznej. Przykładowo, wykazano, że może ona pomóc w zunifikowaniu pewnych, jak dotąd konkurencyjnych, teorii ekonomicznych. Udowodniono bowiem, że pewne znane w teorii ekonomii modele gospodarki, w zależności od wartości występujących w nich parametrów, mogą prowadzić do stabilnego punktu równowagi (charakteryzującego podejście ekonomii klasycznej) lub bardziej złożonego (typowego dla teorii Keynesa) – np. cykli lub nawet chaosu<sup>31</sup>.

Wspomniane modele wzrostu stanowią w teorii ekonomii istotną, lecz oczywiście nie jedyną, grupę modeli chaotycznych. Wśród ekonomicznych modeli z chaosem dominują makroekonomiczne. Wiele z nich jest modyfikacją znanych na gruncie teorii ekonomii modeli, np. Ricardo, Hicksa, Solowa, Keynesa, Samuelsona, Kaldora, Goodwina czy Haavelmo. Modyfikacje te polegają zazwyczaj na wprowadzeniu do modelu chaotycznej funkcji generującej, której własności spełniają założenia modelu i są sensowne z punktu widzenia teorii ekonomii. Wśród pozostałych modeli można wyróżnić mikroekonomiczne (np. modele pajęczynowe), finansowe, logistyczne, modele teorii gier i in. W tabeli 1 zaprezentowano przykłady ekonomicznych modeli z dynamiką chaotyczną, wraz z odnośnikami do literatury źródłowej.

Analiza własności chaotycznych systemów dynamicznych prowadzi do ciekawych, z punktu widzenia ekonomisty, wniosków. Do najważniejszych z nich można zaliczyć następujące:

1. źródłem złożonej cykliczności zjawisk gospodarczych mogą być czynniki endogeniczne (deterministyczne),

---

<sup>30</sup> Por. Bullard J.B., Butler A., *op. cit.*

<sup>31</sup> Barnett W.A. i in., *op. cit.*, s. 62.

2. pozornie losowe szeregi czasowe mogą pochodzić od bardzo prostych (np. jednowymiarowych) systemów generowanych przez deterministyczne reguły,
3. rynki modelowane przez systemy chaotyczne nie są efektywne, gdyż możliwe jest ich krótkookresowe prognozowanie przy wykorzystaniu wiedzy o stanach z przeszłości,
4. znajomość deterministycznych praw ewolucji systemu nie jest równoważna możliwości dokładnego prognozowania jego ewolucji w dowolnym horyzoncie czasowym (wrażliwość na zmianę warunków początkowych systemów chaotycznych w praktyce powoduje wykładniczy wzrost błędów prognoz<sup>32</sup>),
5. powodem pojawiania się w szeregach obszarów różnej zmienności mogą być bifurkacje polegające np. na przejściu od dynamiki regularnej do chaotycznej. Innym źródłem występowania nagłych zmian w przebiegu procesu może być, spowodowane zaburzeniami zewnętrznymi, przeskakiwanie trajektorii systemu do obszarów przyciągania innych atraktorów lub sama funkcja generująca,
6. postawienie wyraźnej granicy pomiędzy losowością a determinizmem jest niezwykle trudne.

**Tabela 1. Ekonomiczne modele z dynamiką chaotyczną w literaturze światowej**

Autor	Model
<b>Modele makroekonomiczne</b>	
J. Benhabib, R. Day (1980), (1982)	Zmodyfikowany model OLG Diamonda.
J. Benhabib, G. Laroque (1988)	Model OLG
A. Bhaduri, D.J. Harris (1987)	Zmodyfikowany model wzrostu Ricardo.
J.M. Blatt (1983)	Model wzrostu Hicksa.
M. Boldrin, L. Montrucchio (1986)	Model optymalnego wzrostu.
M. Boldrin, K. Nishimura, T. Shigoka, M. Yano (2001)	Model optymalnego wzrostu.
L. Colombo, G. Weinrich (2001)	Model OLG z konsumentami, producentami i rządem, dopuszczający stochastyczny charakter decyzji konsumentów.
R.A. Dana, P. Malgrange (1984)	Model wzrostu z mnożnikiem i akceleratorem.
R. Day (1982), (1983)	Modele wzrostu: klasyczny i Solowa.
R. Day, W. Shafer (1985)	Keynesowski model stałych cen w ramach modelu IS-LM.
R. Deneckere, S. Pelikan (1986)	Model optymalnego wzrostu.
R. Farmer (1986)	Model OLG z gospodarką produkcyjną.
G. Gabisch (1984)	Model wzrostu z mnożnikiem i akceleratorem typu Samuelsona .
J-M. Grandmont (1985)	Model OLG.
F.R. Hahn (1992)	Walrasowska gospodarka wymiany.

<sup>32</sup> Por. np. Tempeczyk M., *op. cit.*, s. 209-210.

B. Jullien (1988)	Model OLG.
H-W. Lorenz (1989)	Model Kaldora cykli koniunkturalnych.
A. Medio, G. Negroni (1996)	Model CARAL - OLG z funkcją produkcji Leontiewa.
M.J. Pohjola (1981)	Nieliniowa wersja modelu wzrostu Goodwina.
P. Reichlin (1986)	Model OLG gospodarki produkcyjnej z ograniczoną substytucją kapitał-praca.
M.T. Stutzer (1980)	Model wzrostu Haavelmo.
R.G. de Vilder (1995)	Dwuwymiarowy model OLG z produkcją.
<b>Pozostałe modele ekonomiczne</b>	
J. Benhabib, R. Day (1981)	Model decyzji konsumenckich uzależnionych m.in. od poziomu bogactwa, przyzwyczajień czy relacji korzyści praca/czas wolny.
C. Chiarella (1986)	Model pajęczynowy.
R.A. Dana, L. Montrucchio (1986)	Modele z zakresu teorii gier opisujące zachowania rynkowe duo- i oligopoli.
P. De Grauwe. H. Dewachter, M. Embrechts (1993)	Modele kursów wymiany walut.
D.S. Dendrinos (1986)	Zagadnienia logistyczne dotyczące dynamiki rozwoju organizacji w przestrzeni.
S. Keen (1995)	Model finansowy typu Minsky'ego.
P. Nijkamp (1987)	Zagadnienia logistyczne dotyczące dynamiki rozwoju organizacji w przestrzeni.
T. Onozaki, G. Sieg, G. Yokoo (2000)	Model pajęczynowy.
D. Rand (1978)	Modele z zakresu teorii gier opisujące zachowania rynkowe duo- i oligopoli.
D.G. Saari (1984)	Mechanizmy głosowania.
D.G. Saari, S.R. Williams (1986)	Systemy o różnych poziomach decentralizacji informacji.
F. Van der Ploeg (1985)	Model Begga wyceny obligacji.
R.W. White (1985)	Zagadnienia logistyczne dotyczące dynamiki rozwoju organizacji w przestrzeni.
M. Woodford (1989)	Decyzje przedsiębiorców dotyczące konsumpcji i oszczędności.

Źródło: opracowanie własne.

## Podsumowanie

Wczesne modele deterministyczne zjawisk ekonomicznych cechowały się dynamiką zbyt prostą, aby można było uznać, że dobrze opisują złożoną rzeczywistość. Teoria chaosu wnosi cenny wkład do modelowania procesów ekonomicznych, gdyż bogactwo zachowań opisywanych przez nią systemów daje potencjalną możliwość wyeliminowania tej niezgodności pomiędzy teorią a praktyką. Dodatkowo systemy chaotyczne są deterministyczne, tzn. kładą nacisk na wzajemne oddziaływanie czynników endogenicznych,

co stanowi nawiązanie do prac pierwszych badaczy cykli gospodarczych. I choć do niektórych istniejących modeli chaotycznych można mieć z ekonomicznego punktu widzenia pewne zastrzeżenia, to jednak teoria chaosu w żaden sposób nie jest sprzeczna z teorią ekonomii. Z powyższych powodów lista istniejących ekonomicznych modeli z chaosem systematycznie się powiększa, stanowiąc wyzwanie i inspirację zarówno dla teoretyków ekonomii, jak i dla ekonometryków.

## **Chaotic models in economics**

Nonlinear deterministic models have been appeared in economics in the middle of the 20th century. Their point at the interactions between internal forces as a source of complex dynamics in economic systems. Chaotic dynamic systems are a particular type of such models. Irregular frequencies and amplitudes of chaotic fluctuations make them difficult to distinguish from a random behaviour. In fact, unlike truly random processes, chaotic dynamics can be forecast very precisely in a short run.

Specific properties of chaotic motion have caused the noticeable increase of the popularity of chaos theory amongst economists. For the last 20-30 years the significant amount of chaotic models of economic systems has been developed.

This paper deals with possibilities of using chaotic systems to economic modeling. The reasons making chaos theory interesting to economists and relations between different concepts of modeling have been presented. The basic properties of chaotic models and the implications for the economic theory have been described. Additionally selected chaotic models known in economics have been listed.

## **Literatura**

- Barnett W.A., Medio A., Serletis A. [1997], *Nonlinear And Complex Dynamics In Economics*, *maszynopis*, Washington University
- Baumol W.J., Banhabib J. [1989], *Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications*, *Journal of Economic Perspectives*, vol. 3, no. 1, 77-105
- Benhabib J., Day R. [1980], *Erratic accumulation*, *Economics Letters*, vol. 6, 113-118
- Benhabib J., Day R. [1981], *Rational choice and erratic behaviour*, *Review of Economic Studies*, vol. 48, 459-471

- Benhabib J., Day R. [1982], A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 4, 37-55
- Benhabib J., Laroque G., [1988], On competitive cycles in productive economy, *Journal of economic Theory*, vol. 45, 145-170
- Bhaduri A., Harris D.J. [1987], The Complex Dynamics of the Simple Ricardian System, *Quarterly Journal of Economics*, vol. 102, 893-901
- Blatt J.M. [1983], *Dynamic Economic Systems – A Post-Keynesian Approach*. Armonk: M.E.Sharpe
- Boldrin M., Montrucchio L. [1986], On the indeterminacy of capital accumulation paths, *Journal of Economic Theory*, vol. 40, 26-39
- Boldrin M., Nishimura K., Shigoka T., Yano M. [2001], Chaotic Equilibrium Dynamics in Endogenous Growth Models, *Journal of Economic Theory*, vol. 96, 97-132
- Brock W.A., Hommes C.H. [1997], *Models of Complexity in Economics and Finance, maszynopis*, University of Wisconsin, Madison
- Bullard J.B., Butler A. [1991], Nonlinearity and Chaos in Economic Models: Implications for Policy Decisions, *maszynopis 1991-002B*, The Federal Reserve Bank of St. Louis
- Chiarella C. [1986], The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics, *praca doktorska*, University of New South Wales
- Colombo L., Weinrich G. [2001], The Phillips Curve as a Long-Run Phenomenon in a Macroeconomic Model with Complex Dynamics, *Computing in Economics and Finance*, vol. 13
- Czerwiński Z. [1992], *Dylematy ekonomiczne*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa
- Dana R.A., Malgrange P. [1984], The dynamics of discrete version of a growth cycle model, w: *Analyzing the Structure of Econometric Models*, J.P.Ancot, ed., Wighoff, Amsterdam
- Dana R.A., Montrucchio L. [1986], Dynamic complexity in duopoly games, *Journal of Economic Theory*, vol. 40, 40-56
- Day R. [1982], Irregular growth cycles, *American Economic Review*, vol. 72, 406-414
- Day R. [1983], The emergence of chaos from classical economic growth, *Quarterly Journal of Economics*, vol. 98, 201-213

- Day R., Shafer W. [1985], Keynesian chaos, *Journal of Macroeconomics*, vol. 7, 277-295
- De Grauwe P., Dewachter H., Embrechts M. [1993], *Exchange Rate Theory: Chaotic Models of Foreign Exchange Markets*, Blackwell, Oxford
- Dendrinos D.S. [1986], On the Incongruous Spatial Employment Dynamics, w: *Technological Change, Employment and Spatial Dynamics*, Nijkamp P., ed., Springer, Berlin-Heidelberg-New York
- Deneckere R., Pelikan S. [1986], Competitive chaos, *Journal of Economic Theory*, vol. 40, 13-25
- Farmer R. [1986], Deficits and cycles, *Journal of Economic Theory*, vol. 40, 77-88
- Gabish G. [1984], Nonlinear Models of Business Cycle Theory, w: *Selected Topics in Operations Research and Mathematical Economics*, Hammer G., Pallaschke D., eds., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 205-222
- Grandmont J-M. [1985], On endogenous competitive business cycles, *Econometrica*, vol. 50, 1345-1370
- Grandmont J.-M., Malgrange P. [1986], Nonlinear Economic Dynamics: Introduction, *Journal of Economic Theory*, vol. 40, 3-12
- Hahn F.R. [1992], Equilibrium dynamics and chaos: A textbook approach, *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, vol. 210, 279-285
- Jullien B., [1988], Competitive business cycles in an overlapping generations economy with production, *Journal of Economic Theory*, vol. 46, 45-65
- Keen S. [1995], Finance and Economic Breakdown: Modeling Minsky's 'Financial Instability Hypothesis', *Journal of Post Keynesian Economics*, vol. 17, 607-635
- Li T.Y., Yorke J.A. [1975], Period Three Implies Chaos, *American Mathematical Monthly*, vol. 82, 985-992
- Lorenz H.-W. [1989], *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg
- May R., Beddington J.R. [1975], Nonlinear Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, Chaos, *maszynopis*
- Medio A., Negroni G. [1996], Chaotic dynamics in overlapping generations models with production, w: *Nonlinear Dynamics and Economics*, Barnett W.A., Kirman A.P., Salmon M., eds., Cambridge University Press, Cambridge

- Nijkamp P. [1987], Long-Term Economic Fluctuations: A Spatial View, *Socio-Economic Planning*, vol. 21, 189-197
- Onozaki T., Sieg G., Yokoo G. [2000], Complex dynamics in a cobweb model with adaptive production adjustment, *Journal of Economic Behavior and Organization*, vol. 4, 101-115
- Ploeg F. van der [1985], Rational Expectations, Risk and Chaos in Financial Markets, *The Economic Journal*, vol. 96, 151-162
- Pohjola M.J. [1981], Stable and Chaotic Growth: the Dynamics of a Discrete Version of Goodwin's Growth Cycle Model, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, vol. 41, 27-38
- Prokhorov A.B. [2001], Nonlinear Dynamics and Chaos Theory in Economics: a Historical Perspective, *maszynopis*, EC 816
- Rand D. [1978], Exotic phenomena in games and duopoly models, *Journal of Mathematical Economics*, vol. 5, 173-184
- Reichlin P. [1986], Equilibrium cycles in an overlapping generations economy with production, *Journal of Economic Theory*, vol. 40, 89-102
- Saari D.G. [1984], The ultimate of chaos resulting from weighted voting systems, *Advances in Applied Mathematics*, vol. 5, 286-308
- Saari D.G., Williams S.R. [1986], On the local convergence of economic mechanisms, *Journal of Economic Theory*, vol. 40, 89-102
- Stutzer M.T. [1980], Chaotic dynamics and bifurcation in a macro-model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 2, 253-276
- Tempczyk M. [1995], *Świat harmonii i chaosu*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa
- Vilder de R.G. [1995], Endogenous Business cycles, *Tinbergen Institute Research Series*, vol. 96, University of Amsterdam
- White R.W. [1985], Transitions to Chaos with Increasing System Complexity: The Case of Regional Industrial Systems. *Environment and Planning A*, vol. 17, 387-396
- Woodford M. [1989], Imperfect financial intermediation and complex dynamics, w: *Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity*, Barnett W.A., Geweke J., Shell K., eds., Cambridge University Press, Cambridge
- Zawadzki H. [1996], *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego, Katowice