

*Jacek Kwiatkowski*  
*Witold Orzeszko*  
*Uniwersytet Mikołaja Kopernika*

## Wykładnik Lapunowa – narzędzie identyfikacji chaosu na WGPW

### 1. Wstęp

Według teorii chaosu deterministycznego istnieją procesy generowane przez deterministyczne reguły, których burzliwy przebieg wydaje się być zaprzeczeniem regularności i porządku. Oznacza to, że chaotyczne systemy dynamiczne mogą generować wyniki wyglądające na losowe, chociaż takimi w istocie nie są. Własność ta stanowi podstawę zainteresowania badaczy i rodzi pytanie czy dotychczas analizowane szeregi są realizacją procesu stochastycznego, czy też generowane są przez chaotyczny układ dynamiczny.

Obecnie na gruncie ekonomii znanych jest wiele teoretycznych modeli generujących zachowanie chaotyczne por. np. Frank i Stengos [11]. Naturalnym wyzwaniem dla ekonomistów stało się zatem zweryfikowanie hipotezy o chaotycznym charakterze rzeczywistych zjawisk ekonomicznych. Jako przykłady prac z tego zakresu można podać artykuły Scheinkmana i LeBarona [22], Hsieha [14] oraz Willey'a [24] i Drabik [6] dotyczące kursów giełdowych, Franka i Stengosa [11] badających stopy zwrotu cen złota, czy Franka, Gencay'a i Stengosa [13] analizujących wybrane szeregi makroekonomiczne.

Standardowe metody identyfikacji szeregów czasowych tj. funkcja autokorelacji i analiza spektralna nie są w stanie odróżnić szeregów chaotycznych od losowych. Istnieją chaotyczne układy dynamiczne, które generują szeregi identyczne z tymi, jakie tworzą procesy stochastyczne<sup>1</sup>. Z tego powodu w ostatnich latach trwają prace nad stworzeniem metod, które byłyby w stanie właściwie zidentyfikować szeregi chaotyczne. Do najważniejszych z nich należą wymiar korelacyjny oraz wykładnik Lapunowa.

Celem tego artykułu jest próba identyfikacji chaosu deterministycznego w polskich szeregach czasowych w oparciu o estymację wykładnika Lapunowa. W szczególności poddano badaniu kurs WIG, WIG20 oraz kursy akcji dwóch przykładowo wybranych spółek – BRE i Vistuli od lipca 1994 do końca marca 2002. Analizowane szeregi składają się z 1920 obserwacji dziennych oraz z 381 notowań tygodniowych. Dodatkowo w oparciu o zebrane dane poddano analizie stopy zwrotu (zmian) wybranych akcji oraz indeksów.

### 2. Wykładnik Lapunowa chaotycznych systemów dynamicznych

Centralnym obiektem w teorii chaosu jest pojęcie nieliniowego systemu dynamicznego. Systemem dynamicznym jest każdy realny system, którego stan

---

<sup>1</sup> Np. odwzorowanie trójkątne, które ma taką samą wewnętrzną, zautokorelowaną strukturę jak proces autoregresyjny AR(1), por. Sakai i Tokumaru [20].

jest funkcją czasu, tzn. podlega zmianom w czasie. Ekonomicznymi systemami dynamicznymi mogą być: rynek, gospodarstwo domowe, konsument, gospodarka narodowa itp. Formalnie rzecz ujmując, przez system dynamiczny rozumie się parę  $(X, f)$ , gdzie  $X \subset \mathbb{R}^m$  jest przestrzenią metryczną stanów danego systemu, zaś  $f : X \rightarrow X$  jest odwzorowaniem tej przestrzeni w siebie. Odwzorowanie  $f$  definiuje ewolucję systemu w czasie poprzez równanie różniczkowe:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

gdzie  $x \in X$ , albo w przypadku systemu dynamicznego z czasem dyskretnym - przez zależność rekurencyjną:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (2.2)$$

gdzie  $t = 0, 1, \dots$ ,  $x_t, x_{t+1} \in X$  są stanami systemu odpowiednio w czasie  $t$  i  $t+1$ .

Nie istnieje jedna, powszechnie akceptowana definicja deterministycznego chaosu, czyli chaosu w systemach dynamicznych (Zawadzki [29]). Warto jednak wyróżnić dwie podstawowe cechy systemów chaotycznych: nieliniowość funkcji  $f$  oraz wrażliwość systemu na zmianę warunków początkowych. Inną interesującą własnością systemów dynamicznych jest generowanie zbiorów granicznych - tzw. atraktorów. Najogólniej rzecz ujmując atraktor systemu dynamicznego (Zawadzki [29]; Kudrewicz [15])  $(X, f)$  to domknięty i ograniczony podzbiór przestrzeni stanów  $A \subset X$ , do którego w kolejnych iteracjach zbiegają punkty pewnego otoczenia tego podzbioru<sup>2</sup>. Z rodziny atraktorów można wyróżnić tzw. dziwne atraktory, w których system jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych. Niektórzy autorzy rozróżniają pojęcie atraktora dziwnego, kojarzonego z fraktalną strukturą geometryczną i chaotycznego, cechującego się wrażliwością na zmianę warunków początkowych (por. Barnett i in. [1] str. 14). Pojęcie dziwnego atraktora wykorzystywane jest do definiowania chaotycznych systemów dynamicznych; wg. definicji Garrido (Zawadzki [29]) – system dynamiczny  $(X, f)$  nazywa się chaotycznym, gdy ma dziwny atraktor.

Wrażliwość systemu zdefiniował Wiggins (Zawadzki [29]), według którego system dynamiczny jest wrażliwy w zbiorze  $X$  na zmianę warunków początkowych, jeżeli istnieje liczba  $\varepsilon > 0$ , spełniająca warunek, że dla każdego  $x \in X$  oraz każdego otoczenia  $U$  punktu  $x$  istnieje  $x' \in U$  oraz  $n \geq 1$  takie, że:

$$\|f^n(x) - f^n(x')\| > \varepsilon, \quad (2.3)$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę iteracji, zaś  $f^n$  jest  $n$ -krotnym złożeniem funkcji  $f$ .

---

<sup>2</sup> Formalne definicje atraktora przedstawia np. Brock [5] str. 170 oraz Barnett i in. [1] str. 12.

Ilościową miarą poziomu wrażliwości systemu na zmianę warunków początkowych jest wykładnik Lapunowa. Niech  $x_0$  i  $x_0 + \delta_0$  będą dwoma stanami jednowymiarowej przestrzeni  $X \subset R$  oraz niech  $\delta_n$  oznacza odległość między  $f^n(x_0)$  a  $f^n(x_0 + \delta_0)$ , czyli obrazami stanów  $x_0$  i  $x_0 + \delta_0$  w  $n$ -tej iteracji. Typowa dla ewolucji chaotycznej jest zależność:

$$\delta_n = \delta_0 e^{n\lambda} \quad (2.4)$$

dla  $\lambda > 0$  (Schuster [23]). Występująca w równaniu (2.4) wielkość  $\lambda$  nazywa się *wykładnikiem Lapunowa*. Jeśli orbitą stanu  $x_0$  nazwiemy ciąg  $(x_0, f^1(x_0), \dots, f^n(x_0))$ , gdzie  $f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0))$  dla  $n = 1, 2, \dots$ , to widać, że wykładnik Lapunowa mierzy tempo zbiegania lub rozbiegania się orbit bliskich sobie stanów początkowych. Im większy wykładnik Lapunowa, tym większa wrażliwość systemu, a więc można powiedzieć, że większy poziom jego chaotyczności.

Systemy  $m$ -wymiarowe mają  $m$  wykładników Lapunowa, które mierzą średnie tempo oddalania albo zbliżania się w kolejnych iteracjach dwóch stanów początkowych, względem każdego wymiaru. Warunkiem koniecznym, aby układ  $m$ -wymiarowy był chaotyczny jest posiadanie przynajmniej jednego dodatniego wykładnika. W literaturze przedmiotu można spotkać się z podejściem, w myśl którego istnienie dodatniego wykładnika Lapunowa uznaje się za warunek nie tylko konieczny, ale również dostateczny istnienia chaosu (por. Frank i Stengos [11]).

Mając dany system dynamiczny  $(X, f)$ , można w dość prosty sposób wyznaczyć spektrum jego wykładników Lapunowa (np. Zeng, Pielke i Eykholt [30]). Wykładniki te wykorzystuje się nie tylko do mierzenia wrażliwości systemu, ale również do sprawdzania jego dyssypatywności (istnienie atraktora), do wyznaczania entropii systemu i wymiaru fraktalnego atraktora (Zeng, Pielke i Eykholt [30]). Warto podkreślić, że wartości dodatnich wykładników Lapunowa mogą być bardzo małe. Przykładowo, model Mackey'a-Glassa, który jest znanym chaotycznym systemem (Wolf i in. [27]) posiada teoretycznie wyznaczony największy wykładnik Lapunowa równy 0,0063.

W praktyce ekonomicznej istotnym zagadnieniem jest określenie zachowania układu w przyszłości. Istnienie dodatniego wykładnika Lapunowa uniemożliwia efektywne prognozowanie ewolucji pojedynczego stanu w dłuższym okresie. Duża wrażliwość na zmianę warunków początkowych systemów chaotycznych powoduje, że przewidywalność zmniejsza się wykładniczo wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy. Warto jednak podkreślić, że pomimo początkowego rozbiegania się orbit, stany pozostają w pewnym ograniczonym obiekcie – atraktorze, który opisuje długookresowe zachowanie się systemu jako całości.

Empiryczna analiza systemów (w tym i ekonomicznych) musi z konieczności odbywać się bez znajomości wzoru analitycznego funkcji generującej, przestrzeni stanów oraz jej wymiaru. Przedmiotem badania jest

wygenerowany przez system dynamiczny jednowymiarowy szereg obserwacji  $(y_t)$ . Według definicji szereg  $(y_t)$  jest realizacją systemu chaotycznego, gdy istnieje funkcja  $h$  taka, że:

$$y_t = h(x_t), \quad (2.5)$$

gdzie  $x_t$  jest generowane przez zależność (2.3).

Występującą w powyższym modelu funkcję  $h: X \rightarrow R$  nazywa się urządzeniem pomiarowym (Zawadzki [29]), przy czym w praktyce jej wzór analityczny też nie jest znany. Jednakże mimo braku znajomości podstawowych parametrów systemu możliwa jest rekonstrukcja jego dynamiki wyłącznie w oparciu o szereg  $(y_t)$ . Podstawą teoretyczną stosowanej w tym celu procedury jest twierdzenie Takensa o zanurzaniu (Takens [25]). Na podstawie twierdzenia Takensa stworzono metodę opóźnień, której istotą jest rekonstrukcja przestrzeni fazowej (czyli przestrzeni stanów systemu), w oparciu o tzw.  $p$ -historie. Przez  $p$ -historie rozumie się ciąg wektorów  $(y_t^p)$  o  $p$  współrzędnych:

$$y_t^p = (y_t, y_{t+j-1}, \dots, y_{t+j-(p-1)}) \quad (2.6)$$

utworzonych z ciągu obserwacji  $y_t$ , gdzie  $p$  określa się jako wymiar zanurzenia natomiast  $j$  jest opóźnieniem czasowym. W swoich rozważaniach Takens analizował przestrzeń  $(Y, F)$ , gdzie  $Y$  jest zbiorem  $p$ -historii, zaś  $F: R^p \rightarrow R^p$  odwzorowaniem opisującym ich dynamikę tzn.  $F(y_t^p) = y_{t+1}^p$ . W uproszczeniu twierdzenie Takensa głosi, że dla odpowiednio dużych wartości  $p$  systemy  $(Y, F)$  oraz  $(X, f)$  są dyfeomorficzne, a więc w pewnym sensie równoważne. Możliwa jest wówczas w oparciu o ciąg  $p$ -historii rekonstrukcja atraktora badanego systemu oraz pewnych jego charakterystyk tj. wymiaru korelacyjnego, wykładników Lapunowa oraz entropii systemu (Brock [5]).

Algorytmy obliczające wykładnik Lapunowa przedstawili m.in. Abarbanel i in. [1], Briggs [4], Brown i in. [6], Dechert i in. [6], Deppisch i in. [8], Eckmann i in. [16], Ellner i in. [11], Nychka i in. [10], Rauf i in. [24], Rosenstein i in. [19], Sano i in. [21], Stoop i in. [24], Wolf i in. [27] oraz Wright [28].

Wykorzystany w niniejszej pracy algorytm szacowania wykładnika Lapunowa opiera się na równaniu (2.4) w zastosowaniu do  $p$ -historii<sup>3</sup>. Dla każdego  $y_i^p$  znaleziono jego najbliższego (w sensie  $p$ -wymiarowej metryki euklidesowej) sąsiada  $y_j^p$  spełniającego warunek, że  $|i-j| > 10$ . Celem nałożonego warunku jest zwiększenie prawdopodobieństwa, że znaleziony najbliższy sąsiad nie będzie należał do trajektorii wektora  $y_i^p$ .

Następnie przyjęto:

---

<sup>3</sup> Autorami algorytmu są Rosenstein i in. [19].

$$d_0(i) = \|y_i^p - y_j^p\| \quad (2.7)$$

i obliczono

$$d_n(i) = \|F^n(y_i^p) - F^n(y_j^p)\| \equiv \|y_{i+n}^p - y_{j+n}^p\|. \quad (2.8)$$

Z równania (2.4) wynika, że:

$$d_n(i) \approx d_0(i) \cdot e^{n\lambda}, \quad (2.9)$$

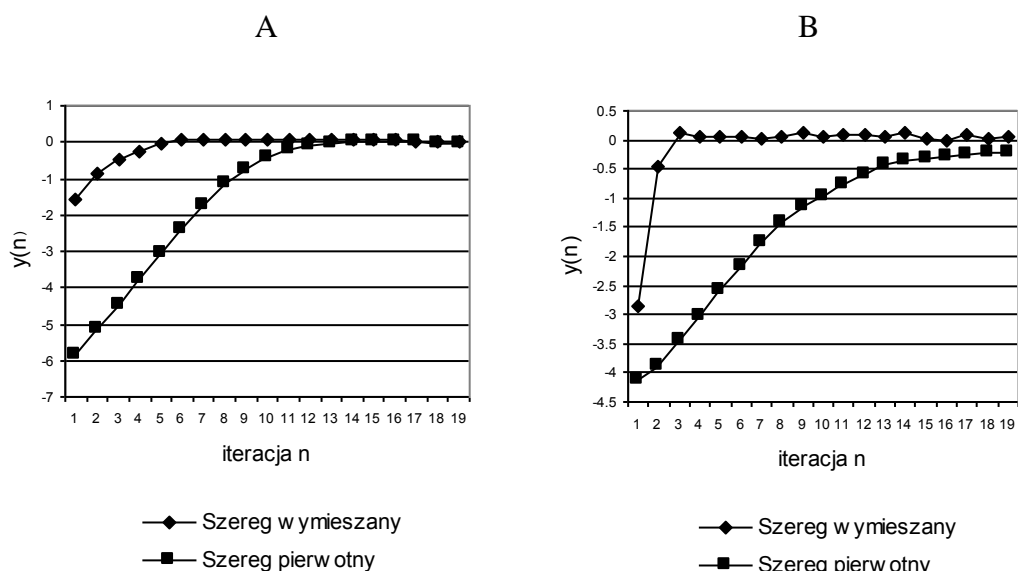
co po obustronnym zlogarytmowaniu daje zależność:

$$\ln(d_n(i)) = \ln(d_0(i)) + \lambda n. \quad (2.10)$$

Równanie (2.10) służy do szacowania wykładnika Lapunowa i tym samym stanowi podstawę do identyfikacji chaosu deterministycznego. Wykładnik Lapunowa oblicza się jako współczynnik równania regresji zmiennej  $y(n) = \langle \ln d_n(i) \rangle$ , gdzie symbol  $\langle \dots \rangle$  oznacza operator średniej arytmetycznej po wszystkich  $i$ , względem  $n$ .

Rysunek 1 przedstawia wykres logarytmów średnich odległości między dwoma początkowymi stanami, a kolejnymi iteracjami  $n$  dla odwzorowania logistycznego  $x_{t+1} = 4 \cdot x_t \cdot (1 - x_t)$  (rys. 1.A) i szeregu Henona  $x_{t+1} = 1 - 1,4 \cdot x_t^2 + 0,3 \cdot x_{t-1}$  (rys. 1.B) będących najpopularniejszymi przykładami ewolucji chaotycznej.

Rysunek 1. Logarytm średnich odległości między dwoma początkowymi stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla odwzorowania logistycznego (A);  $x_0 = 0,2$  i szeregu Henona (B);  $x_0 = 0,9$ , ( $j = 1, p = 2$ ).

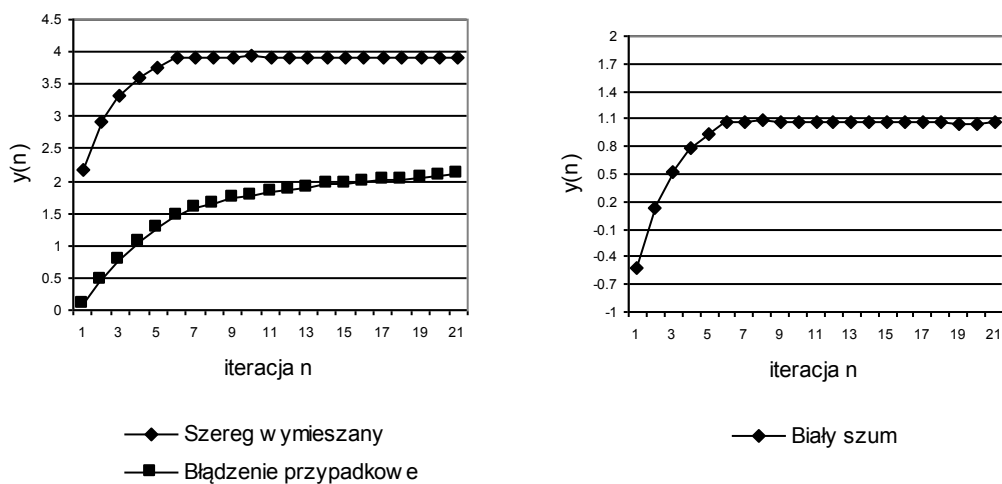


Źródło: Obliczenia własne.

Jak przedstawiono na rysunku 1 w przypadku systemów chaotycznych wraz ze wzrostem liczby iteracji logarytm średnich odległości między sąsiednimi stanami zmienia się liniowo. W dalszych iteracjach odległość między stanami stabilizuje się, ponieważ pozostają one w ograniczonym obszarze - atraktorze. Wyznaczona na podstawie pierwszych ośmiu wartości prosta dla odwzorowania logistycznego ma współczynnik nachylenia równy  $\lambda = 0,697$ , podczas gdy prawdziwa wartość wykładnika Lapunowa dla odwzorowania logistycznego wynosi 0,693. Dla odwzorowania Henona współczynnik nachylenia obliczony w oparciu o osiem pierwszych wartości wyniósł  $\lambda = 0,412$  przy prawdziwej wartości równej 0,418.

Dla porównania przedstawiono wyniki badań szeregów będących realizacjami procesów stochastycznych – błędzenia przypadkowego i białego szumu. Jak widać na rysunku 2 w początkowej fazie wykresów brak wzrostu o wyraźnie liniowym charakterze. W przypadku błędzenia przypadkowego punkty zdają się układać wzdłuż krzywej logarymicznej, natomiast wykres dla białego szumu po okresie krótkotrwałego nieliniowego wzrostu wyraźnie stabilizuje się.

Rysunek 2. Logarytm średnich odległości między dwoma stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla procesu błędzenia przypadkowego i białego szumu ( $j=1, p=5$ ).



Źródło: Obliczenia własne.

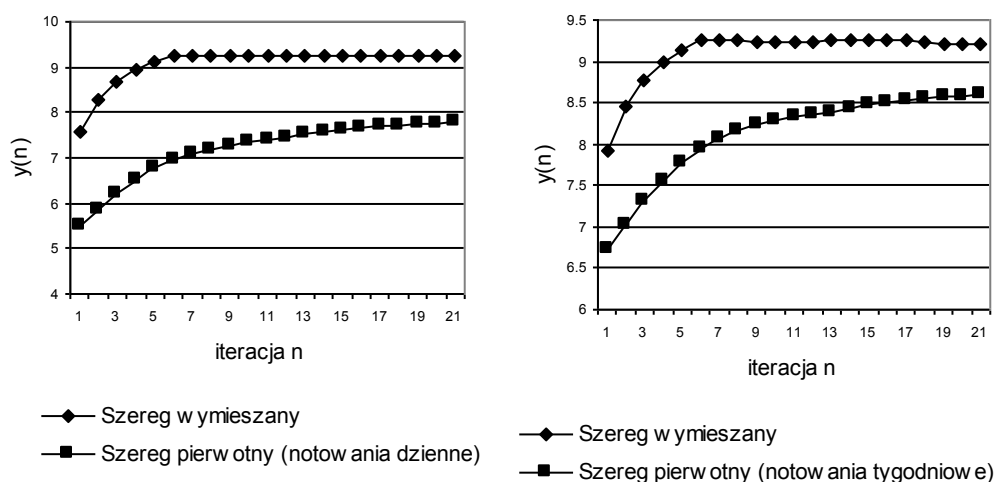
Algorytmy obliczające największy wykładnik Lapunowa w oparciu o obserwowany szereg czasowy polegają na wyznaczaniu tzw. lokalnego wykładnika Lapunowa, mierzącego zbieżność (rozbieżność) stanów poprzez analizę orbit o skończonej długości  $N$ . Oczywiście w granicy, gdy  $N \rightarrow \infty$  lokalny wykładnik Lapunowa zbiega do globalnego (Bask [3]). Nieuniknioną wadą lokalnego wykładnika Lapunowa jest to, że jego wartości mogą się dość znacznie różnić w zależności od rozpatrywanych stanów początkowych (szczególnie dla małych wartości  $N$ ). Dodatkowym problemem jest brak

odpowiedniej teorii umożliwiającej statystyczną weryfikację otrzymanych rezultatów<sup>4</sup>.

### 3. Identyfikacja chaosu deterministycznego na WGPW

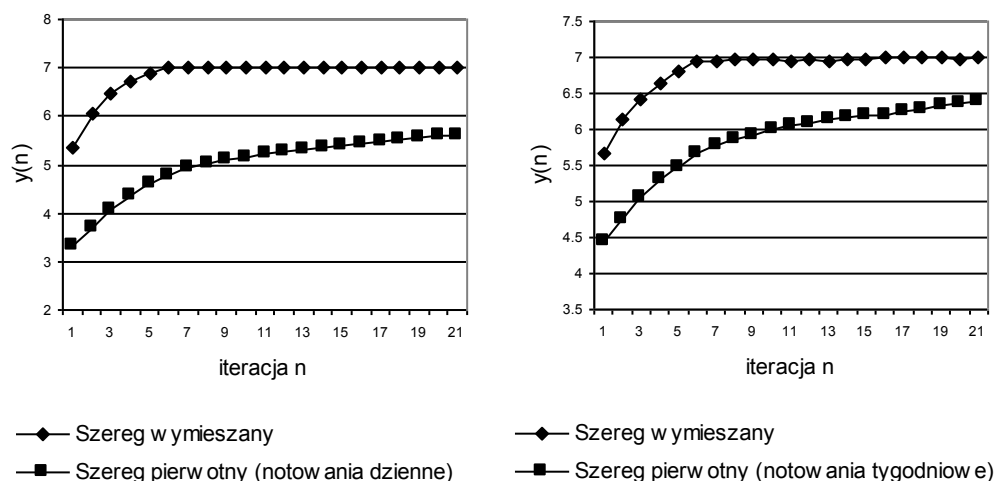
Badaniu poddano kurs WIG, WIG20 oraz notowania akcji BRE i Vistuli. Analizowane szeregi obejmowały okres od lipca 1994 do końca marca 2002 i składały się z 1920 notowań dziennych i 381 obserwacji tygodniowych.

Rysunek 3. Logarytm średnich odległości między dwoma początkowymi stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla dziennego i tygodniowego kursu WIG.



Źródło: Obliczenia własne.

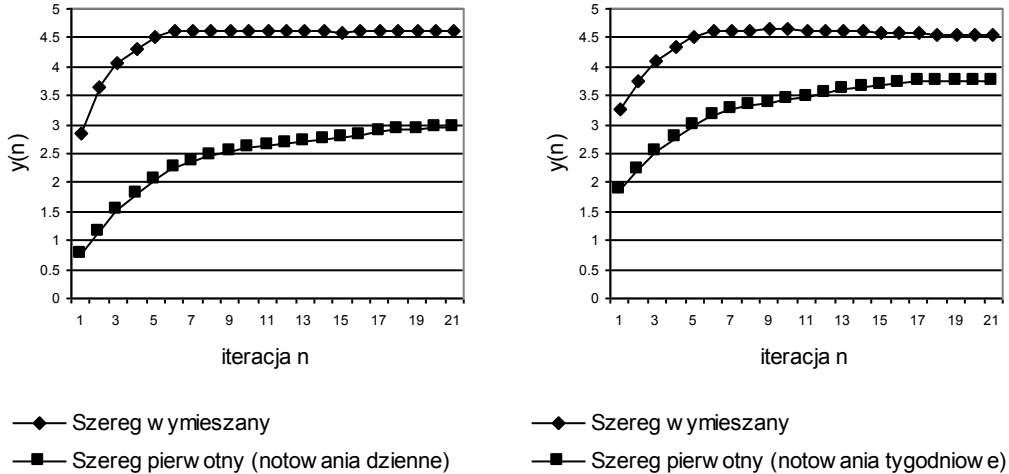
Rysunek 4. Logarytm średnich odległości między dwoma początkowymi stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla dziennego i tygodniowego kursu WIG20.



Źródło: Obliczenia własne.

<sup>4</sup> np. pozwalającej zbadać istotność oszacowanych dodatnich wykładników bliskich zeru.

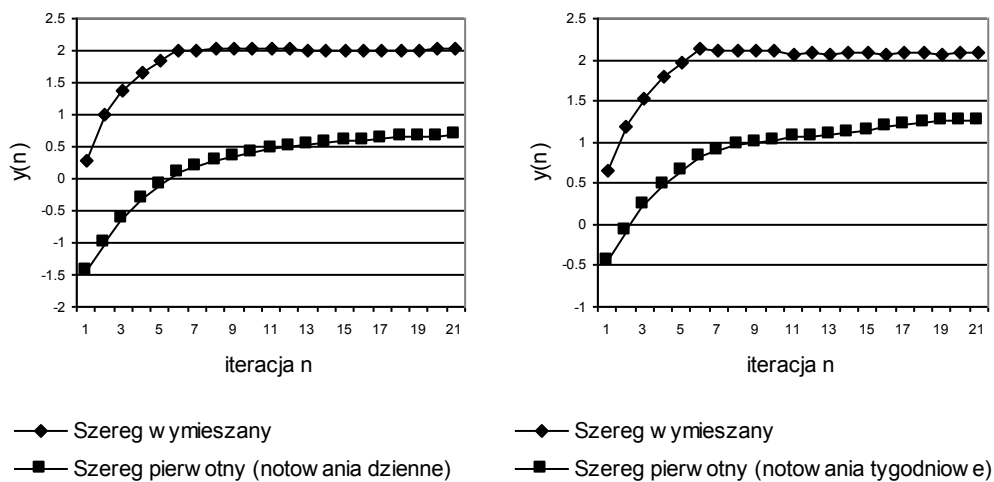
Rysunek 5. Logarytm średnich odległości między dwoma początkowymi stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla dziennego i tygodniowego kursu akcji BRE.



Źródło: Obliczenia własne.

Prezentowane rysunki przedstawiają logarytm średnich odległości między dwoma sąsiednimi stanami w  $n$ -tej iteracji analizowanych szeregów. Otrzymane wyniki porównano z wynikami uzyskanymi dla szeregów wymieszanych. W prezentowanej pracy zdecydowano się przedstawić wyniki dla wymiaru zanurzenia  $p$  równego 5. Analiza innych wymiarów nie wносиła zasadniczych zmian, dlatego też pominięto ją w prezentacji. Opóźnienie czasowe  $j$  wynosi jeden.

Rysunek 6. Logarytm średnich odległości między dwoma początkowymi stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla dziennego i tygodniowego kursu akcji Vistuli.

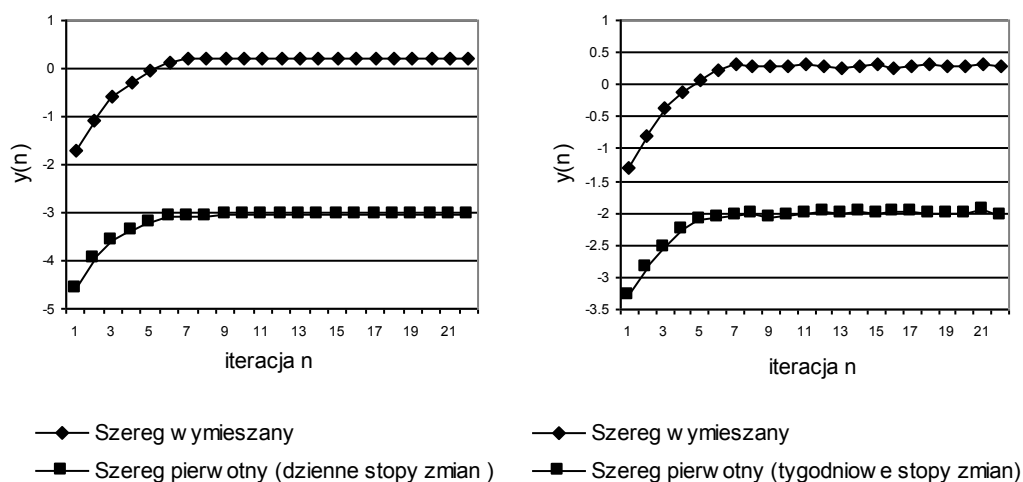


Źródło: Obliczenia własne.



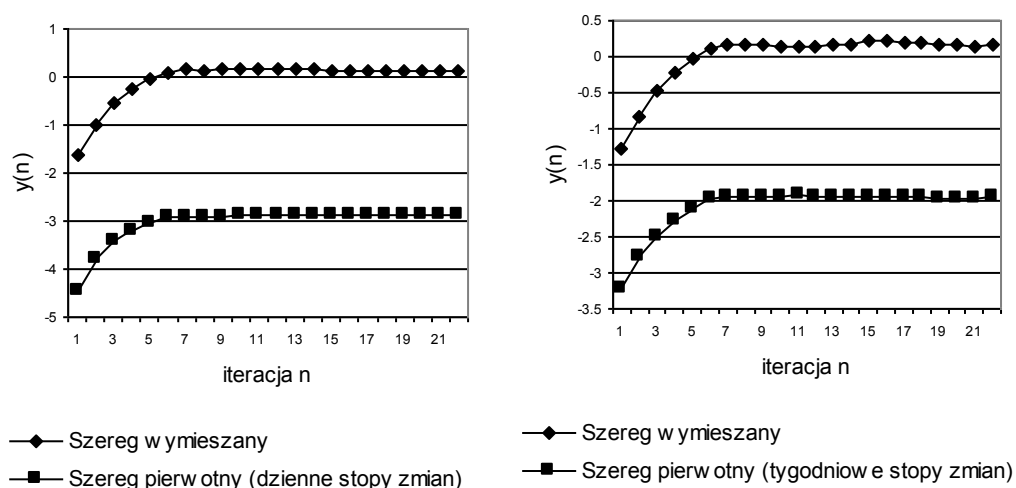
Dodatkowo badaniu poddano dzienne i tygodniowe stopy zmian dla WIG, WIG20 oraz dzienne i tygodniowe stopy zwrotu BRE i Vistuli. Rysunki 7 - 10 przedstawiają logarytm średnich odległości między dwoma sąsiednimi stanami w  $n$ -tej iteracji obliczony w oparciu o wymienione szeregi.

Rysunek 7. Logarytm średnich odległości między dwoma początkowymi stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla dziennych i tygodniowych stóp zmian indeksu WIG.



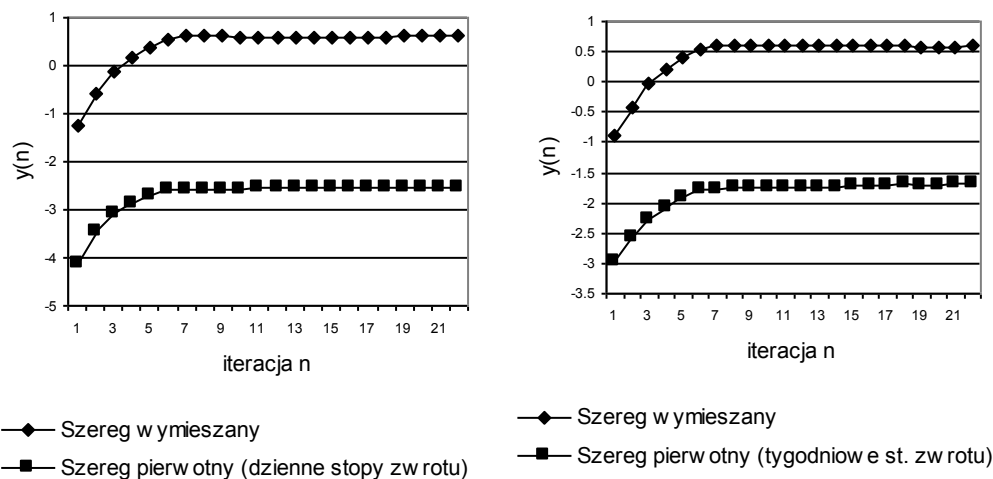
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 8. Logarytm średnich odległości między dwoma początkowymi stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla dziennych i tygodniowych stóp zmian indeksu WIG20.



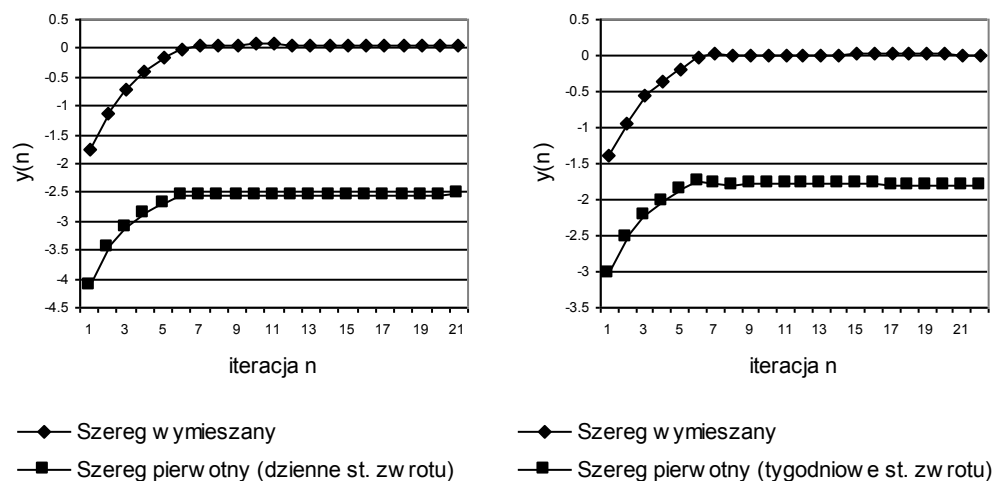
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 9. Logarytm średnich odległości między dwoma początkowymi stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla dziennych i tygodniowych stóp zwrotu BRE.



Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 10. Logarytm średnich odległości między dwoma początkowymi stanami w kolejnych iteracjach  $n$  dla dziennych i tygodniowych stóp zwrotu Vistuli.



Źródło: Obliczenia własne.

Analizując rysunki 3 - 10 można stwierdzić, że zarówno dla kursu WIG, WIG20, notowań akcji BRE i Vistuli oraz dla ich stóp zwrotu (zmian) występuje brak wyraźnej zależności liniowej między logarytmem średnich odległości sąsiednich stanów a liczbą iteracji. W przypadku notowań punkty układają się

wzdłuż krzywej logarytmicznej podobnie jak dla procesu błędzenia przypadkowego, natomiast wykresy dla stóp zwrotu wydają się być zgodne z otrzymanymi dla realizacji białego szumu. Identyczne rezultaty otrzymano dla cen akcji innych badanych spółek. Uzyskane wyniki badań nie dają podstaw do zaakceptowania hipotezy o chaotycznym charakterze analizowanych procesów.

## 5. Zakończenie

W prezentowanej pracy przedstawiono podstawowe pojęcia związane z wykładnikiem Lapunowa w chaotycznych układach dynamicznych. Chaos deterministyczny dotyczy zjawisk generowanych przez deterministyczne reguły, których burzliwy przebieg wydaje się być zaprzeczeniem regularności i porządku, a w konsekwencji może generować wyniki wyglądające na losowe, choć takimi w istocie nie są. Chaotyczne systemy dynamiczne cechują się nieliniowym charakterem ewolucji stanów, wrażliwością na zmianę warunków początkowych oraz tworzeniem dziwnych atraktorów. Podstawową miarą wrażliwości systemu na zmianę warunków początkowych jest wykładnik Lapunowa. Istnienie dodatniego wykładnika Lapunowa jest typowe dla ewolucji chaotycznej i oznacza, że odległość dwóch sąsiednich orbit w kolejnych iteracjach rośnie wykładniczo. Z praktycznego punktu widzenia wrażliwość na zmianę warunków początkowych uniemożliwia efektywne prognozowanie zachowania się układów chaotycznych w dłuższym horyzoncie czasowym.

W pracy poddano analizie notowania oraz stopy zwrotu (zmian) WIG, WIG20 oraz dwóch spółek – BRE i Vistuli od lipca 1994 do końca marca 2002. Uzyskane wyniki wskazują, że odległość sąsiednich orbit wraz ze wzrostem liczby iteracji nie zmienia się wykładniczo. W świetle otrzymanych rezultatów wątpliwa staje się hipoteza o chaotycznym charakterze notowań na WGPW.

## Literatura

- [1] Abarbanel H.D.I., Brown R., Kennel M.B., *Local Lyapunov Exponents Computed from Observed Data*, Journal of Nonlinear Science, vol. 2, 1992, 343-365.
- [2] Barnett W.A, Medio, A., Serletis A., *Nonlinear And Complex Dynamics In Economics*, maszynopis.
- [3] Bask M., *Esseys on exchange rates: deterministic chaos and technical analysis*, 1998, maszynopis.
- [4] Briggs K., *An improved method for estimating Liapunov exponents of chaotic time series*, Physics Letters A, vol. 151, no. 1;2, 1990, 27-32.
- [5] Brock W.A., *Distinguishing random and deterministic systems: abridged version*, Journal of Economic Theory, 40, 1986, 168-195.
- [6] Brown R., Bryant P., Abarbanel H.D.I., *Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from observed time series*, Physical Review A, 43, 1991.

- [7] Dechert W., Gencay R., *Lyapunov exponents as a nonparametric diagnostic for stability analysis*, Journal of Applied Econometrics 7, 1992, S41-S60.
- [8] Deppisch J., Bauer H.-U., Geisel T., *Hierarchical training of neural networks and prediction of chaotic time series*, Physical Letters A, 158, 1991.
- [9] Drabik E., *O dualnym podejściu do funkcji cen walorów giełdowych*, Rynek Kapitałowy – skuteczne inwestowanie, Szczecin 2000.
- [10] Eckmann J.P., Ruelle D., *Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors*, Reviews of Modern Physics, 57, 1985, 617-656.
- [11] Ellner S., Gallant A.R., McCaffrey D., Nychka D., *Convergence rates and data requirements for Jacobian-based estimates of Lyapunov exponents from data*, Physical Letters A, 153, 1991
- [12] Frank M., Stengos T., *Chaotic dynamics in economic time series*, Journal of Economic Surveys, 2 (2), 1988, 103-133.
- [13] Frank M., Gencay R., Stengos T., *International chaos?*, European Economic Review, 32 (8), 1988, 1569-1584.
- [14] Hsieh D.A., *Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets*, Journal of Finance, (5), 1991, 1839-1877.
- [15] Kudrewicz J., *Fraktale i chaos*, Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa, 1993.
- [16] Nychka D., Ellner S., Gallant R., McCaffrey D., *Finding Chaos in Noisy Systems*, Journal of the Royal Statistical Society B, 54, no. 2, 1992, 399-426.
- [17] Peters E.E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1996.
- [18] Rauf F., Ahmed H.M., *Calculation of Lyapunov exponents through nonlinear adaptive filters*, Proceedings IEEE international Symposium on Circuits and Systems, Singapore 1991.
- [19] Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J., *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, Physica D, 65, 1993, 117-134.
- [20] Sakai H., Tokumaru H., *Autocorrelations of a Chaos*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, V.I.ASSP-28, 1980, 588-590.
- [21] Sano M., Sawada Y., *Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series*, Physical Review Letters, 55, 1985.
- [22] Scheinkman J., LeBaron B., *Nonlinear dynamics and stock returns*, Journal of Business, 62, 1989, 311-337.
- [23] Schuster H.G., *Chaos deterministyczny: wprowadzenie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
- [24] Stoop R., Parisi J., *Calculation of Lyapunov exponents avoiding spurious elements*, Physica D, 50, 1991, 89-94.
- [25] Takens F., *Detecting Strange Attractors in Turbulence*, (D. Rand and L.Young, Eds), w: *Dynamical Systems and Turbulence*, Springer-Verlag, 1981, 366-381.
- [26] Willey T., *Testing for nonlinear dependence in daily stock indices*, Journal of Economics and Business, 44 (1), 1992, 63-76.
- [27] Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A., *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Physica D, 16, 1985, 285-317.

- [28] Wright J., *Method for calculation a Lyapunov exponent*, Physical Review A, 29, 1984.
- [29] Zawadzki H., *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego, Katowice 1996.
- [30] Zeng X., Pielke R.A., Eykholt R., *Extracting Lyapunov exponents from short time series of low precision*, Modern Physics Letters B, 6, 1992, 55-75.

### **Streszczenie**

Klasyczne metody identyfikacji szeregów czasowych nie są w stanie odróżnić zachowania chaotycznego od losowego. Z tego powodu w ostatnich latach trwają prace nad stworzeniem metod, które byłyby w stanie właściwie zidentyfikować dynamikę chaotyczną. Do najważniejszych z nich należą wymiar korelacyjny oraz wykładnik Lapunowa. Istnienie dodatniego wykładnika Lapunowa jest warunkiem koniecznym chaotyczności systemu oraz oznacza wykładnicze zmniejszanie się dokładności prognozowania szeregu czasowego wraz ze zwiększaniem się horyzontu prognozy.

W niniejszej pracy przeprowadzono próbę identyfikacji chaosu deterministycznego w oparciu o analizę wykładnika Lapunowa dla wybranych szeregów pochodzących z WGPW. Wyniki przeprowadzonych badań nie dają podstaw do przyjęcia hipotezy o chaotycznym charakterze analizowanych szeregów.

*UNIwersytet Mikołaja Kopernika*

### **Streszczenie**

Klasyczne metody identyfikacji szeregów czasowych nie są w stanie odróżnić zachowania chaotycznego od losowego. Z tego powodu w ostatnich latach trwają prace nad stworzeniem metod, które byłyby w stanie właściwie zidentyfikować dynamikę chaotyczną. Do najważniejszych z nich należą wymiar korelacyjny oraz wykładnik Lapunowa. Istnienie dodatniego wykładnika Lapunowa jest warunkiem koniecznym chaotyczności systemu oraz oznacza wykładnicze zmniejszanie się dokładności prognozowania szeregu czasowego wraz ze zwiększaniem się horyzontu prognozy.

W niniejszej pracy przeprowadzono próbę identyfikacji chaosu deterministycznego w oparciu o analizę wykładnika Lapunowa dla wybranych szeregów pochodzących z WGPW. Wyniki przeprowadzonych badań nie dają podstaw do przyjęcia hipotezy o chaotycznym charakterze analizowanych szeregów.

*UNIwersytet Mikołaja Kopernika*