Joanna Górka*

Kurtoza w procesach generowanych przez model RCA GARCH

Wstęp

Na przestrzeni ostatniej dekady odnotowuje się szybki rozwój modeli nieliniowych. Widoczna jest zwłaszcza różnorodność nieliniowych specyfikacji modelowych, które rozszerzają i uzupełniają metodologię szeregów czasowych przez wprowadzenie bardziej ogólnych struktur lub dostarczają alternatywnych podejść. Ze względu na swą prostotę, łatwe poddawanie się estymacji oraz duże możliwości opisywania różnych aspektów nieliniowej dynamiki rynków finansowych największą popularnością wśród badaczy cieszą się modele z klasy GARCH [Engle, 1982; Bollerslev, 1986]. Innym, alternatywnych podejściem do opisu procesów finansowych są modele autoregresyjne z losowymi parametrami (RCA) [Nicholls, Quinn, 1982]. Nie są one tak popularne jak modele z klasy GARCH, choć są naturalnym uogólnieniem klasycznych liniowych modeli autoregresyjnych.

Obydwa modele stanowią dogodne narzędzie do analizy zmienności szeregów finansowych i zarówno modele RCA, jak i modele ARCH są szczególnym przypadkiem szerszej klasy modeli jakim są modele CHARMA [Tsay, 1987].

Badania rynków finansowych wykazały, iż procesy finansowe, takie jak stopy zwrotu, kursy walut i inne charakteryzują się leptokurtycznością rozkładów i zmienną wariancją warunkową.

Modelowanie podwyższonej kurtozy i zmiennej w czasie wariancji warunkowej nie zawsze jest możliwe za pomocą modelu ARMA-GARCH z innowacjami o rozkładzie normalnym. Stad też, do modeli ARMA-GARCH, wprowadza się inne rozkłady innowacji, takie jak rozklad t-Studenta, skośny t-Studenta, czy też rozkład GED. Alternatywnym sposobem modelowania podwyższonej kurtozy szeregów finansowych jest dopuszczenie zmienności parametru w modelu podstawowym (ARMA, GARCH). Zmienność parametru w modelu powoduje podwyższenie wartości kurtozy w stosunku do modelu ze stałym parametrem. Tak jest w przypadku modelowania średniej jak i wariancji warunkowej. W przypadku modelowania średniej jest to zastosowanie modelu RCA, zamiast modelu AR, natomiast w przypadku wariancji jest to zastosowanie modelu RCA GARCH [Thavaneswaran, Appadoo, Samanta, 2005] zamiast modelu GARCH z rozkładem t-Studenta (lub podobnym). W literaturze modele GARCH z losowymi parametrami [Ghysels, Jasiak, 1998] były już zastosowane do modelu ACD-GARCH. Jednakże, wprowadzona tam losowość parametrów znacząco różni się od propozycji Thavaneswarana, Appadoo, Samanty (2005).

* Dr, Katedra Ekonometrii i Statystyki Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania UMK w Toruniu, adres e-mail: jgora@uni.torun.pl.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie modeli RCA GARCH jako alternatywnego, w stosunku do modeli GARCH z rozkładem t-Studenta, sposobu modelowania zmienności.

W pierwszej części przedstawiony zostanie ogólny model GARCH. Jako, że przedmiotem porównań analizowanych modeli będzie wartość kurtozy, w niniejszym opracowaniu przedstawiono ogólną postać kurtozy dla modeli GARCH oraz wyprowadzono wzory dla konkretnych postaci modeli. Druga część zawiera krótki opis modelu RCA wraz z jego podstawowymi własnościami. W kolejnej części przedstawiono modele GARCH(1,1) z losowym parametrem wraz z wartościami kurtozy. Ostatnia część zawiera porównanie teoretycznych wartości kurtozy dla omawianych modeli.

1. Modele GARCH

Ogólny model $\mathrm{GARCH(p,q)}$ opisany jest równaniami:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{2}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$, $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ oraz $\beta_j \geq 0$.

Wzory na teoretyczną wartości kurtozy dla procesów generowanych przez poszczególne modele GARCH, są podawane w literaturze z tego zakresu. Brak jest ogólnego wzoru na wartość kurtozy procesu. Poniżej zaprezentowany będzie bardziej ogólny wzór na kutrozę dla wielu modeli z klasy GARCH (tzn. z różnymi rozkładami reszt)

W celu zapisania ogólnego wzoru na kurtozę modelu GARCH bez względu na typ rozkładu model (1)-(2) należy zapisać w postaci ARMA. Jeżeli $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2$ jest różnicą martyngałową o wariancji $\mathrm{var}(u_t) = \sigma_u^2$, to model (1)-(2) może być interpretowany jako model $\mathrm{ARMA(m,q)}$ dla y_t^2 postaci:

$$y_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) y_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j u_{t-j} + u_t \tag{3}$$

lub

$$\phi(B) y_t^2 = \omega + \beta(B) u_t \tag{4}$$

gdzie $\phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) B^i = 1 - \sum_{i=1}^{m} \phi_i B^i$, $\beta(B) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j B^j$, $m = \max\{p, q\}$, $\alpha_i = 0$ dla $i > q$ oraz $\beta_i = 0$ dla $j > p$.

Warunkami stacjonarności dla y_t^2, który ma reprezentacje ARMA(m,q), są [Thavaneswaran, Appadoo, Samanta, 2005]:

(Z.1) Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego $\phi(B) = 0$ leżą poza kołem jednostkowym.

(Z.2) $\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i^2 < \infty$, gdzie ψ_i są współczynnikami wielomianu spełniającego równanie $\psi(B)\phi(B) = \beta(B)$ postaci $\psi(B) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i B^i$. Współczynniki wielomianu wyznacza się tak samo jak dla modelu ARMA.

Założenia te gwarantują nieskorelowanie u_t, średnią zero i skończoną wariancję dla u_t oraz to, że proces y_t^2 jest stacjonarny w szerszym sensie.

Jeżeli model GARCH(p,q) opisany równaniem (4) spełnia warunki (Z.1)-(Z.2) i ma skończony bezwarunkowy moment czwartego rzędu, to kurtozę K procesu y_t^2 opisanego równaniem (4) można zapisać [Thavaneswaran, Appadoo, Samanta, 2005]:

$$K = \frac{E\left(\varepsilon_t^4\right)}{E\left(\varepsilon_t^4\right) - \left[E\left(\varepsilon_t^4\right) - 1\right]\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i^2} \tag{5}$$

Wartości parametrów konkretnego modelu są zawarte w poszczególnych wartościach wag. Przyjmując te same założenia jak w stosunku do kurtozy, otrzymujemy również ogólne wzory na wariancję i autokowariancję y_t^2 [Thavaneswaran, Appadoo, Samanta, 2005]:

$$\operatorname{var}\left(y_t^2\right) = \gamma_0 = \sigma_u^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty}\psi_i^2\,, \tag{6}$$

$$\operatorname{cov}\left(y_t^2 y_{t-k}^2\right) = \sigma_u^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty}\psi_{i+k}\psi_i \quad \text{dla } k > 0\,. \tag{7}$$

Jeżeli oprócz założeń (Z.1)-(Z.2), skończonego momentu czwartego rzędu przymniemy jeszcze, że:

a) $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, to wówczas $E\left(\varepsilon_t^4\right) = 3$ zaś równanie (5) ma postać:

$$K = \frac{3}{1 - 2\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i^2}\,, \tag{8a}$$

b) $\varepsilon_t \sim$ t-Studenta z $\nu > 4$ stopniami swobody, to $E\left(\varepsilon_t^4\right) = \frac{3(\nu-2)}{\nu-4}$ oraz:

$$K = \frac{3(\nu-2)}{3(\nu-2) - 2(\nu-1)\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i^2}\,. \tag{8b}$$

Wzory (8a)-(8b) przedstawiają ogólny wzór na kurtozę dla procesów generowanych przez modele GARCH przy założeniu, iż rozkład innowacji ε_t jest rozkładem normalnym lub t-Studenta.

Niech dany będzie model ARCH(1) postaci:

$$y_t = \sigma_t\varepsilon_t\,,\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 \tag{9}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$, $\omega > 0$ oraz $\alpha_1 \geq 0$.

Pierwszym krokiem jest zapisanie (9) w postaci modelu ARMA. Niech $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2$. Wówczas równanie wariancji modelu ARCH ma postać $y_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + u_t$, zaś $\phi(B) = 1 - \alpha_1 B$, $\beta(B) = 1$, $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ...$ Rozwiązując równanie $\psi(B)\phi(B) = \beta(B)$ otrzymujemy: $\psi_1 = \alpha_1$, $\psi_2 = \alpha_1^2$, ...,

$\psi_i = \alpha_1^i, \ldots$. Stąd $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 = 1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^4 + \ldots$. Na podstawie założenia (Z.1), wiemy, że $\alpha_1^2 < 1$. Wówczas $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 = \frac{1}{1-\alpha_1^2}$. Podstawiając do wzorów (8a) i (8b) otrzymujemy wzory na kurtozę procesu generowanego przez model ARCH(1):

$$K = \frac{3}{3 - 2\frac{1}{1-\alpha_1^2}} = \frac{3\left(1-\alpha_1^2\right)}{1-3\alpha_1^2}, \tag{10a}$$

$$K = \frac{3(\nu-2)\left(1-\alpha_1^2\right)}{3(\nu-2)\left(1-\alpha_1^2\right) - 2(\nu-1)}, \tag{10b}$$

Warunkiem koniecznym istnienia kurtozy (10a) jest $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$, zaś w przypadku (10b) jest $\alpha_1^2 < \frac{\nu-4}{3(\nu-2)}$.

W podobny sposób można otrzymać kurtozę procesu opisanego przez model GARCH(1, 1). Niech dany będzie model GARCH(1,1) opisany równaniami:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \; \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{11}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$, $\omega > 0, \alpha_1 \geq 0$ oraz $\beta_1 \geq 0$.

Wówczas, wielomiany modelu ARMA opisanego równaniem (4) przyjmują wartości:

$\phi(B) = 1 - (\alpha_1 + \beta_1)B$, $\beta(B) = 1 - \beta_1 B$, zaś $\psi_1 = \alpha_1$, $\psi_2 = \alpha_1(\alpha_1 + \beta_i)$, ..., $\psi_i = \alpha_1(\alpha_1 + \beta_1)^{i-1}, \ldots$ Zatem $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 = 1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^2(\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2(\alpha_1 + \beta_1)^4 + \ldots$

Na podstawie założenia (Z.1) wiadomo, że $(\alpha_1 + \beta_1)^2 < 1$. Stąd suma skończona kwadratów wag wynosi $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 = 1 + \frac{\alpha_1^2}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2}$. Następnie, podstawiając do wzorów (8a) i (8b), otrzymujemy wzory na kurtozę y_t^2:

$$K = \frac{3}{3 - 2\left(1 + \frac{\alpha_1^2}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2}\right)} = \frac{3\left(1-(\alpha_1+\beta_1)^2\right)}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2 - 2\alpha_1^2}, \tag{12a}$$

$$K = \frac{3(\nu-2)\left[1-(\alpha_1+\beta_1)^2\right]}{(\nu-4)\left[1-(\alpha_1+\beta_1)^2\right] - 2(\nu-1)\alpha_1^2}. \tag{12b}$$

Wzór (12a) jest znany w literaturze [np. Doman, Doman, 2004]. Wartość kurtozy (12a) procesu generowanego przez model GARCH występuje, jeśli spełniony jest warunek $(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1$. Spełnienie tego warunku gwarantuje również spełnienie założenia (Z.1) oraz, w przypadku parametru α_1, redukuje się do warunku $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$ [Doman, Doman, 2004]. Kurtoza procesu generowanego przez model GARCH z innowacjami o rozkładzie t-Studenta (12b) istnieje, gdy $\frac{\alpha_1^2}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2} < \frac{\nu-4}{2(\nu-1)}$.

2. Modele RCA

Modele autoregresyjne z losowymi parametrami (RCA) są naturalnym uogólnieniem klasycznych liniowych modeli autoregresyjnych. Pełny opis tych modeli wraz z własnościami, metodami estymacji oraz aplikację można znaleźć w pracy Nicholls i Quinn (1982).

Jednowymiarowy model autoregresyjny rzędu pierwszego z losowym parametrem można zapisać w postaci:

$$y_t = (\alpha + \delta_t) y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{13}$$

gdzie

$$\begin{pmatrix} \delta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim^{iid} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_\delta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right). \tag{14}$$

Dla zapewnienia stacjonarności oraz ergodyczności procesu y_t załóżmy, że:

$$\alpha^2 + \sigma_\delta^2 < 1. \tag{15}$$

Warunek (15) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym stacjonarności drugiego rzędu procesu y_t. Warunki (14)-(15) gwarantują ścisłą stacjonarność procesu. Model (1), przy odpowiednich założeniach, może być modelem typu AR, STUR, RCA(1, *p*) [Górka, 2007; Lee, 1998].

Jeżeli spełnione są warunki (14)-(15), to proces (13) ma następujące własności [Appadoo, Thavaneswaran, Singh, 2006; Aue, 2004]:

$$E(y_t) = 0, \tag{16}$$

$$E(y_t^2) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2-\sigma_\delta^2}, \tag{17}$$

$$\mathrm{cov}(y_t, y_{t-\tau}) = \frac{\alpha^\tau \sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2-\sigma_\delta^2}, \tag{18}$$

$$K = \frac{3\left[1-\left(\alpha^2+\sigma_\delta^2\right)^2\right]}{1-\left(\alpha^4+6\alpha^2\sigma_\delta^2+3\sigma_\delta^4\right)}. \tag{19}$$

Zatem proces charakteryzuje się zerową średnią, stałą wariancją i kurtozą oraz autokowariancją zależną tylko od przesunięcia czasowego. Wartość wariancji jak i autokowariancji dla procesu opisanego modelem RCA(1) jest większa niż dla procesu opisanego AR(1). Warunek konieczny występowania kurtozy ma postać $\alpha^4 + 6\alpha^2\sigma_\delta^2 + 3\sigma_\delta^4 < 1$.

Jeżeli $\sigma_\delta^2 = 0$ (tj. dla modelu AR(1)), to wartość kurtozy (19) redukuje się do wartości 3. Z wzoru (19) wynika, że:

$$K_{AR(1)} \leq K_{RCA(1)} . \tag{20}$$

Relację (20) można uogólnić dla modeli AR oraz RCA [Appadoo, Thavaneswaran, Singh, 2006].

Warunkowa średnia oraz wariancja procesu opisanego równaniem (13) ma postać [Hwang, Basawa, Kim, 2006]:

$$E\left[y_t \middle| F_{t-1}\right] = \alpha y_{t-1} , \tag{21}$$

$$Var\left[y_t \middle| F_{t-1}\right] = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2 y_{t-1}^2 . \tag{22}$$

Warunkowa średnia, podobnie jak dla modeli AR, opisana jest funkcją liniową, zaś warunkowa wariancja opisana jest funkcją nieliniową. Stąd też nieliniowość modelu RCA występuje w wariancji. Zatem konsekwencją występowania losowego parametru w modelu AR jest większa wartość kurtozy oraz zmienna w czasie wariancja warunkowa. Zauważmy, że opis warunkowej wariancji jest analogiczny jak w przypadku procesu ARCH(1).

Estymacji ocen parametrów modelu RCA(1) można dokonać z wykorzystaniem metody: MNK, WMNK, MNW [Górka, 2007] czy też modelu przestrzeni stanów i zastosowania filtru Kalmana.

3. Modele RCA GARCH

Analogicznie jak w przypadku modelu AR wprowadza się losowość parametru do modelu ARCH. Model RCA ARCH(1) ma postać:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t , \; \sigma_t^2 = \omega + \left(\alpha_1 + a_{t-1}\right) y_{t-1}^2 \tag{23}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$, $a_t \sim N\left(0, \sigma_a^2\right)$.

Jeżeli przyjmiemy $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2$, to równanie wariancji warunkowej ma postać:

$$y_t^2 = \omega + \left(\alpha_1 + a_{t-1}\right) y_{t-1}^2 + u_t . \tag{24}$$

Zatem, równanie wariancji w modelu RCA ARCH(1) może być interpretowane jako model RCA dla y_t^2. Kurtoza procesu opisanego modelem (24) ma postać [Appadoo, Thavaneswaran, Singh, 2006]:

$$K = \frac{3\left(1 - \alpha_1^2 \sigma_\varepsilon^4\right)}{1 - 3\sigma_\varepsilon^2\left(\alpha_1^2 + \sigma_a^2\right)} \tag{25}$$

Warunek konieczny istnienia kurtozy dla modelu RCA ARCH, to $\sigma_\varepsilon^2\left(\alpha_1^2 + \sigma_a^2\right) < \frac{1}{3}$, podczas gdy dla modelu ARCH $\sigma_\varepsilon^2 \alpha_1^2 < \frac{1}{3}$. Porównując wzory (10a) i (25) otrzymujemy:

$$K_{ARCH(1)} \leq K_{RCA\,ARCH(1)} . \tag{26}$$

Zatem, podobnie jak dla modelu AR, wprowadzenie zmienności parametru w modelu ARCH prowadzi do podwyższenia wartości kurtozy.

W przypadku losowości parametru stojącego przy y_{t-1}^2 w modelu GARCH(1,1) mamy do czynienia z modelem RCA GARCH(1,1), który zapisuje się w postaci:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t\,,\ \sigma_t^2 = \omega + (\alpha_1 + a_{t-1})y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{27}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$.

Jeżeli przyjmiemy $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2$, to równanie wariancji warunkowej ma postać modelu ARMA z losowym parametrem autoregresyjnym, dla y_t^2, tzn.:

$$y_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1 + a_{t-1})y_{t-1}^2 + u_t - \beta_1 u_{t-1}\,. \tag{28}$$

Dla procesu opisanego równaniem (27) wartość kurtozy wynosi [Appadoo, Thavaneswaran, Singh, 2006]:

$$K = \frac{3\left[1 - \left(\alpha_1 \sigma_\varepsilon^2 + \beta_1\right)^2\right]}{1 - 2\sigma_\varepsilon^2 \alpha_1 \beta_1 - 3\sigma_\varepsilon^4 \left(\alpha_1^2 + \sigma_a^2\right) - \beta_1^2}\,. \tag{29}$$

Warunek konieczny występownia kurtozy dla procesu opisanego modelem RCA GARCH(1,1) wynosi $2\sigma_\varepsilon^2 \alpha_1 \beta_1 + 3\sigma_\varepsilon^4 \left(\alpha_1^2 + \sigma_a^2\right) + \beta_1^2 < 1$.

Podobnie jak w przypadku modelu RCA ARCH, wartość kurtozy modelu RCA GARCH jest wyższa niż wartość kurtozy modelu GARCH przy założeniu rozkładu normalnego innowacji, tzn.:

$$K_{GARCH(1,1)} \le K_{RCA\,GARCH(1,1)}\,. \tag{30}$$

W każdym, z przedstawionych przypadków losowość parametrów prowadziła do podwyższenia wartości kurtozy.

3. Analiza porównawcza teoretycznych wartości kurtozy

W celu zobrazowania różnicy we własnościach momentu czwartego poszczególnych modeli, obliczono przykładowe teoretyczne wartości kurtozy. W każdym modelu przyjęto pierwszy rząd opóźnień autoregresyjnych. Przy wyznaczeniu wartości kurtozy, uwzględniono warunki jej istnienia. Miało to wpływ na wartości poszczególnych parametrów modeli.

Warunki istnienia kurtozy dla procesu generowanego przez model ARCH(1) z rozkładem normalnym są następujące:

a) jeżeli $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, to $\alpha_1 < 0.577$,

b) jeżeli $\sigma_\varepsilon^2 = 0.9$, to $\alpha_1 < 0.608$,

c) jeżeli $\sigma_\varepsilon^2 = 0.8$, to $\alpha_1 < 0.645$.

W tablicy 1, umieszczono wartości kurtozy modelu ARCH(1) zależnej od wartości parametru i od wariancji innowacji.

Na podstawie wyników zamieszczonych w tablicy 1 można stwierdzić, iż dla modelu ARCH z rozkładem normalnym niemożliwe jest uzyskanie małej wartości parametru α_1 przy jednocześnie znacznie podwyższonej kurtozie i jednostkowej (lub zbliżonej do tej wartości) wariancji innowacji.

Dla modelu ARCH z rozkładem t-Studenta wartość maksymalna parametru zależy od stopni swobody. Zależność ta przedstawiona jest w tablicy 2.

Tablica 1. Teoretyczne wartości kurtozy dla procesu generowanego przez model ARCH(1) z innowacjami z rozkładu normalnego

α_1	δ_ε^2	Kurtoza	α_1	δ_ε^2	Kurtoza	α_1	δ_ε^2	Kurtoza
0.57	1	80.051	0.6	0.9	75.900	0.64	0.8	130.517
0.5	1	9.000	0.5	0.9	7.362	0.5	0.8	6.300
0.4	1	4.846	0.4	0.9	4.597	0.4	0.8	4.371
0.3	1	3.740	0.3	0.9	3.674	0.3	0.8	3.606
0.2	1	3.273	0.2	0.9	3.254	0.2	0.8	3.234
0.1	1	3.062	0.1	0.9	3.058	0.1	0.8	3.054

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 2. Maksymalne wartości parametru, przy których istnieje kurtoza procesu, generowanego przez model ARCH(1) z innowacjami z rozkładu t-Studenta, w zależności od liczby stopni swobody

v	max wartość parametru	v	max wartość parametru	v	max wartość parametru
4.1	0.126	10	0.500	16	0.535
5	0.333	11	0.509	17	0.537
6	0.408	12	0.516	18	0.540
7	0.447	13	0.522	19	0.542
8	0.471	14	0.527	20	0.544
9	0.488	15	0.531	23	0.549

Źródło: opracowanie własne.

Dla jeszcze większej liczby stopni swobody, wartość parametru nieznacznie się zwiększa osiągając wartość 0,556 dla 30 stopni swobody. Wyliczone wartości kurtozy dla procesu opisanego poszczególnymi modelami przedstawiono w tablicy 3.

Tablica 3. Teoretyczne wartości kurtozy dla procesu generowanego przez model ARCH(1) z innowacjami z rozkładu t-Studenta

α_1	v	Kurtoza	α_1	v	Kurtoza	α_1	v	Kurtoza
0.4	6	126.000	0.4	14	7.132	0.3	5	43.105
0.4	7	21.000	0.4	15	6.882	0.3	6	11.870
0.4	8	13.500	0.4	16	6.682	0.3	7	8.273
0.4	9	10.756	0.4	17	6.517	0.3	8	6.882
0.4	10	9.333	0.4	18	6.380	0.5	11	81.000
0.4	11	8.463	0.4	19	6.263	0.5	12	45.000
0.4	12	7.875	0.4	20	6.163	0.5	14	27.000
0.4	13	7.452	0.4	21	6.076	0.5	16	21.000

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku modelu ARCH z innowacjami o rozkładzie t-Studenta uzyskanie podwyższonej wartości kurtozy, przy jednoczesnej małej wartości parametru nie stanowi problemu. Stosując ten rozkład uzyskuje się również grube ogony, co pozwala na lepsze modelowanie szeregów finansowych. Niemniej jednak, rozkład ten nie jest pozbawiony wad. Teoretycznie rzecz biorąc, w przypadku użycia tego typu rozkładu nie uzyska się wyższych ocen parametru niż 0.556.

Dla procesu opisanego modelem RCA ARCH wartość parametru zależy od wariancji innowacji i wariancji parametru. Przy odpowiednich wartościach tych zmiennych możliwe jest uzyskanie dowolnej (<1) wartości parametru.

Tablica 4. Teoretyczne wartości kurtozy dla procesu generowanego przez model RCA ARCH(1)

α_1	δ_ε^2	δ_a^2	Kurtoza	α_1	δ_ε^2	δ_a^2	Kurtoza	α_1	δ_ε^2	δ_a^2	Kurtoza
0.4	0.9	0.20	93.257	0.4	0.9	0.08	7.418	0.6	0.7	0.10	72.671
0.4	0.9	0.19	47.476	0.4	0.9	0.07	6.890	0.6	0.7	0.08	32.511
0.4	0.9	0.18	31.844	0.4	0.9	0.06	6.432	0.6	0.7	0.06	20.939
0.4	0.9	0.17	23.956	0.4	0.9	0.05	6.030	0.6	0.7	0.04	15.443
0.4	0.9	0.16	19.200	0.4	0.9	0.04	5.677	0.6	0.6	0.10	15.181
0.4	0.9	0.15	16.020	0.4	0.9	0.03	5.362	0.6	0.6	0.08	12.554
0.4	0.9	0.14	13.743	0.4	0.9	0.02	5.080	0.6	0.6	0.06	10.702
0.4	0.9	0.13	12.033	0.4	0.9	0.01	4.827	0.6	0.6	0.04	9.326
0.4	0.9	0.12	10.702	0.4	0.8	0.20	19.800	0.8	0.4	0.18	168.300
0.4	0.9	0.11	9.635	0.4	0.8	0.10	7.162	0.8	0.4	0.10	24.043
0.4	0.9	0.10	8.762	0.4	0.8	0.05	5.429	0.8	0.4	0.01	12.240
0.4	0.9	0.09	8.034	0.4	0.8	0.01	4.549	0.8	0.3	0.01	6.813

Źródło: opracowanie własne.

Gdy proces opisany jest przez model RCA ARCH(1) (Tablica 4) możliwe jest uzyskanie zarówno wyższej, w stosunku do rozkładu normalnego, wartości kurtozy jak i większych wartości parametru. Na uwagę zasługuje również fakt, że dla większych wartości parametru, zmiana wartości wariancji parametru δ_a^2 o 0.01, powoduje znaczącą zmianę wartości kurtozy. Zatem wartości kurtozy dla modelu RCA GARCH są porównywalne do modelu ARCH z rozkładem t-Studenta. Przewagą rozkładu t-Studenta nad rozkładem normalnym jest również możliwość opisu grubych ogonów. Dla modelu RCA ARCH wariancja y_t^2, jest wyższa niż dla modelu ARCH z rozkładem normalnym[1], zatem rozkład innowacji będzie miał grubsze ogony.

Teoretyczne wartości kurtozy dla procesu generowanego przez modele GARCH oraz RCA GARCH przedstawiono w tablicach 5-7. W tym przypadku, podobnie jak dla procesów generowanych przez modele ARCH czy RCA ARCH, wartość kurtozy istnieje pod warunkiem spełnienia warunków koniecznych występowania kurtozy. Wiąże się to z ograniczeniem wartości parametrów, które w przypadku parametru α_1 w modelu GARCH z innowacjami

[1] Korzystając z własności (17) oraz poprzez analogie modelu RCA ARCH, do modelu RCA.

z rozkładu normalnego redukuje się do tego samego ograniczenia co dla modelu ARCH z innowacjami z rozkładu normalnego.

Tablica 5. Teoretyczne wartości kurtozy dla procesu generowanego przez model GARCH(1,1) z innowacjami z rozkładu normalnego

α_1	β_1	δ_ε^2	Kurtoza	α_1	β_1	δ_ε^2	Kurtoza	α_1	β_1	δ_ε^2	Kurtoza
0.05	0.874	1	3.106	0.05	0.615	1	3.027	0.3	0.1	1	3.818
0.10	0.874	1	4.915	0.10	0.615	1	3.128	0.2	0.1	1	3.289
0.05	0.856	1	3.086	0.20	0.615	1	3.938	0.1	0.1	1	3.064
0.10	0.856	1	3.908	0.25	0.615	1	5.958	0.5	0.2	1	153.000
0.05	0.752	1	3.043	0.57	0.010	1	144.261	0.40	0.200	1	6.000
0.10	0.752	1	3.236	0.50	0.100	1	13.714	0.30	0.200	1	3.947
0.20	0.752	1	20.523	0.40	0.100	1	5.233	0.20	0.200	1	3.316

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 6. Teoretyczne wartości kurtozy dla procesu generowanego przez model GARCH(1,1) z innowacjami z rozkładu t-Studenta

α_1	β_1	ν	Kurtoza	α_1	β_1	ν	Kurtoza	α_1	β_1	ν	Kurtoza
0.1	0.856	5	127.734	0.10	0.874	6	232.586	0.15	0.752	6	15.134
0.1	0.856	6	14.319	0.10	0.874	7	22.662	0.15	0.752	7	9.668
0.1	0.856	7	9.342	0.10	0.874	8	14.148	0.15	0.752	8	7.792
0.1	0.856	8	7.584	0.10	0.874	9	11.155	0.15	0.752	9	6.843
0.1	0.856	9	6.686	0.10	0.874	10	9.627	0.15	0.752	10	6.271
0.1	0.856	10	6.140	0.10	0.874	11	8.701	0.20	0.615	5	191.567
0.1	0.856	11	5.774	0.10	0.874	12	8.079	0.20	0.615	6	14.838
0.1	0.856	12	5.511	0.10	0.874	13	7.632	0.20	0.615	7	9.551
0.1	0.856	13	5.313	0.10	0.874	14	7.296	0.20	0.615	8	7.718
0.1	0.856	14	5.158	0.10	0.874	15	7.034	0.20	0.615	9	6.787
0.1	0.856	15	5.034	0.15	0.752	5	262.283	0.20	0.615	10	6.225

Źródło: opracowanie własne.

Proces generowany przez model GARCH z innowacjami z rozkładu normalnego ma wartości kurtozy wyższe niż proces generowany przez model GARCH z tymi samymi wartościami parametru tylko z innowacjami z rozkładu t-Studenta. Wyższe wartości kurtozy procesu generowanego przez model GARCH z innowacjami z rozkładu normalnego można uzyskać poprzez wprowadzenie losowości parametru stojącego przy y_{t-1}^2 (model RCA GARCH). Wówczas, średnia parametru losowego stojącego przy y_{t-1}^2 wynosi α_1, zaś jego wariancja jest równa δ_a^2, zaś wartość parametru stojącego przy σ_{t-1}^2 nie zmienia się. Procesy generowane przez modele GARCH z innowacjami z rozkładu t-Studenta oraz RCA GARCH z innowacjami z rozkładu normalnego pozwalają na opisywanie podwyższonej kurtozy.

Tablica 7. Teoretyczne wartości kurtozy dla procesu generowanego przez model RCA GARCH(1,1)

α_1	β_1	δ_ε^2	δ_a^2	Kurtoza	α_1	β_1	δ_ε^2	δ_a^2	Kurtoza
0.10	0.874	1.0	0.01	116.293	0.2	0.740	0.9	0.033	53.519
0.10	0.874	0.9	0.02	35.927	0.2	0.740	0.9	0.020	11.463
0.10	0.874	0.8	0.03	13.840	0.2	0.740	0.9	0.010	7.144
0.10	0.856	1.0	0.02	42.578	0.2	0.740	0.8	0.065	40.714
0.10	0.856	0.9	0.03	19.723	0.2	0.615	1.0	0.080	63.856
0.10	0.856	0.8	0.05	24.610	0.2	0.615	1.0	0.050	9.523
0.15	0.752	1.0	0.04	26.135	0.2	0.615	1.0	0.020	5.145
0.15	0.752	1.0	0.02	6.870	0.2	0.615	1.0	0.010	4.462
0.15	0.752	0.9	0.07	95.748	0.2	0.615	0.9	0.080	10.149
0.15	0.752	0.9	0.03	6.158	0.2	0.615	0.9	0.050	6.076
0.15	0.752	0.8	0.1	38.204	0.2	0.615	0.9	0.020	4.336
0.15	0.752	0.8	0.05	6.261	0.2	0.615	0.9	0.010	3.958
0.20	0.740	1.0	0.01	54.563	0.2	0.615	0.8	0.100	7.672

Źródło: opracowanie własne.

Zakończenie

W literaturze dotyczącej finansowych szeregów czasowy, często bywa kwestionowana możliwość opisu zjawisk za pomocą modeli ze stałymi parametrami. W modelu RCA GARCH zakłada się znajomość rozkładu parametru. Założenie to ma wpływ na wartość kurtozy procesu generowanego przez model GARCH.

Przeanalizowane teoretyczne własności kurtozy procesu pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- Ograniczeniem stosowania rozkładu normalnego dla innowacji w modelach GARCH jest ograniczenie wartości parametru α_1 do wartości spełniających nierówność $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$.
- Ograniczeniem stosowania rozkładu t-Studenta dla innowacji w modelach GARCH jest ograniczenie wartości parametru α_1 do wartości mniejszych niż 0.556.
- Wartości kurtozy procesu generowanego przez model RCA GARCH są wyższe niż dla procesu generowanego przez model GARCH z innowacjami z rozkładu normalnego.
- Model RCA GARCH może stanowić alternatywę w stosunku do modeli GARCH z rozkładem t-Studenta.

Literatura

1. Appadoo S.S., Thavaneswaran A., Singh J., (2006), RCA models with correlated errors *Applied Mathematics Letters* 19, 824–829.
2. Aue A. (2004), Strong approximation for RCA(1) time series with applications, *Statistics & Probability Letters* 68, 369–382.
3. Bollerslev T. (1986), Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
4. Brzeszczyński J., R. Kelm (2002),*Ekonometryczne modele rynków finansowych.* WIG-Press
5. Engle R. F. (1982), Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, 50, 987-1006.
6. Doman, M., Doman, R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego,* Wyd. AE w Poznaniu, Poznań.
7. Ghysels E., Jasiak J., (1998), GARCH for Irregularly Spaced Financial Data: The ACD-GARCH Model, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 2(4), 133–149.
8. Górka J., (2007), Modele autoregresyjne z losowymi parametrami, w Osińska M. (red.), *Procesy STUR. Modelowanie i zastosowanie do finansowych szeregów czasowych*, Wydawnictwo „Dom Organizatora", Toruń.
9. Hwang S.Y., Basawa I., Kim T.Y. (2006), Least squares estimation for critical random coefficient first-order autoregressive processes, *Statistics & Probability Letters* 76, 310–317.
10. Lee S. (1998), Coefficient constancy test in a random coefficient autoregressive model *Journal of Statistical Planning and Inference* 74, 93-101.
11. Nicholls D.F., Quinn B.G., (1982), *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*, in: Lecture Notes in Statistics, vol. 11, Springer, New York.
12. Thavaneswaran A., Appadoo S.S., Peiris S., (2005), Forecasting volatility, *Statistics & Probability Letters* 75, 1–10.
13. Thavaneswaran A., Appadoo S.S., Samanta M., (2005), Random coefficient GARCH models, *Math. Comput. Modelling* 41, 723–733.
14. Tsay R.S., (1987), Conditional Heteroscedastic Time Series Models *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, No. 398, 590-604.

Streszczenie

W artykule przedstawiono teoretyczne wartości kurtozy procesu generowanego przez modele autoregresyjne ze losowym parametrem (RCA), modele GARCH z innowacjami z rozkładu normalnego albo z rozkładu t-Studenta oraz modele GARCH z losowym parametrem (RCA GARCH). Podano również warunki konieczne istnienia kurtozy dla poszczególnych procesów. W przypadku modeli GARCH przedstawiono ogólny wzór na wartość kurtozy, który pozwala na wyznaczenie teoretycznej wartości kurtozy procesu w zależności od parametrów modelu GARCH(p,q) czy rozkładu innowacji. W ostatniej części wyznaczona została wartość kurtozy procesów opisanych przez modele z zadanymi wartościami parametrów i zadanym rozkładem innowacji.

Zarówno dla procesów generowanych przez model GARCH z innowacjami z rozkładu t-Studenta jak i dla procesu generowanego przez model RCA GARCH wartość kurtozy jest wyższa niż dla procesu generowanego przez model GARCH z innowacjami z rozkładu normalnego, co czyni te dwa modele, modelami konkurencyjnymi.

The kurtosis of the RCA GARCH process (Summary)

This paper considers moment properties as well as kurtosis of the RCA models, GARCH models and RCA GARCH models. An ARMA representation is used to derive the kurtosis of the GARCH models with independent, identically distributed random variables with zero mean and unit variance.