DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2007 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Joanna Górka
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Opis kurtozy rozkładów za pomocą wybranych modeli z funkcją znaku

1. Wstęp

Badania rynków finansowych wykazały, iż procesy finansowe, takie jak stopy zwrotu, kursy walut i inne charakteryzują się leptokurtycznością rozkładów i zmienną wariancją warunkową. Widoczna jest również niesymetryczna reakcja zmienności na pojawienie się pozytywnych i negatywnych informacji (zmian stóp zwrotu). Wariancja cen akcji wzrasta w odpowiedzi na pojawienie się negatywnych informacji i spada w odpowiedzi na pozytywne informacje. Zjawisko to nazywa się powszechnie efektem dźwigni. W modelach takich jak EGARCH, GJR oraz TARCH uwzględniona jest ujemna korelacja pomiędzy stopami zwrotu i ich zmiennością (Brzeszczyński, Kelm, 2002; Doman, Doman, 2004; Fiszeder, 2001; Fornari, Mele, 1997). Fornari i Mele (1997) zaproponowali nieco inny sposób uwzględnienia asymetryczności niż to jest dla modeli GJR. W swojej pracy pokazali, że proponowane przez nich modele prowadzą do lepszych interpretacyjnie wyników niż w przypadku zastosowania modeli GJR.

W literaturze przedmiotu, nieliniowa dynamika rynków finanowych najczęściej opisywana jest poprzez modele z klasy GARCH (Bollerslev, 1986; Engle, 1982). Innym, alternatywnych podejściem opisu procesów finansowych są modele autoregresyjne z losowymi parametrami (RCA) (Nicholls, Quinn, 1982). Natomiast modele RCA GARCH z innowacjami z rozkładu normalnego (Thavaneswaran, Appadoo, Samanta, 2005) mogą stanowić alternatywę do modeli GARCH z rozkładem t-Studenta (lub podobnym) (Górka, 2007b). Uwzględnienie funkcji znaku w modelu RCA wskazuje, że zmiana wartości parametru zależy od znaku obserwacji poprzedniej. Podobnie jest w przypadku modelu RCA GARCH.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wybranych modeli z funkcją znaku. Szczególna uwaga została zwrócona na własności procesów generowanych przez poszczególne modele, a zwłaszcza na wartość kurtozy procesu i warunki jej istnienia.

2. Modele RCA z funkcją znaku

Modele autoregresyjne z losowymi parametrami (RCA) są naturalnym uogólnieniem klasycznych liniowych modeli autoregresyjnych. Pełny opis tych modeli wraz z własnościami, metodami estymacji oraz aplikację można znaleźć w pracy Nicholls i Quinn (1982).

Klasyczny stacjonarny jednowymiarowy model autoregresyjny rzędu pierwszego z losowym parametrem można zapisać w postaci:

$$y_t = (\alpha + \delta_t) y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{1}$$

gdzie

$$\begin{pmatrix} \delta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim_{iid} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_\delta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right), \tag{2}$$

$$\alpha^2 + \sigma_\delta^2 < 1. \tag{3}$$

Warunek (3) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym stacjonarności drugiego rzędu procesu y_t. Warunki (2)-(3) gwarantują ścisłą stacjonarność procesu. Model (1), przy odpowiednich założeniach, może być modelem typu AR, STUR, RCA(1, *p*) (Górka, 2007a; Lee, 1998).

Jeżeli spełnione są warunki (2)-(3), to proces (1) ma następujące własności (Appadoo, Thavaneswaran, Singh, 2006; Aue, 2004):

$$E(y_t) = 0, \tag{4}$$

$$E(y_t^2) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha^2 - \sigma_\delta^2}, \tag{5}$$

$$K = \frac{3\left[1 - \left(\alpha^2 + \sigma_\delta^2\right)^2\right]}{1 - \left(\alpha^4 + 6\alpha^2\sigma_\delta^2 + 3\sigma_\delta^4\right)}. \tag{6}$$

Zatem proces charakteryzuje się zerową średnią oraz stałą wariancją i kurtozą. Wartość wariancji dla procesu opisanego modelem RCA(1) jest większa niż dla procesu opisanego AR(1). Jeżeli $\sigma_\delta^2 = 0$ (tj. dla modelu AR(1)), to wartość kurtozy (6) redukuje się do wartości 3. Warunek konieczny występowania kurtozy ma postać $\alpha^4 + 6\alpha^2\sigma_\delta^2 + 3\sigma_\delta^4 < 1$.

Stacjonarny model RCA z funkcją znaku ma postać (Thavaneswaran, Appadoo, 2006):

$$y_t = (\alpha + \delta_t + \Phi s_{t-1}) y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{7}$$

gdzie spełnione są warunki (2)-(3) oraz

$$s_t = \begin{cases} 1 & \text{dla } y_t > 0 \\ 0 & \text{dla } y_t = 0 \\ -1 & \text{dla } y_t < 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Jeżeli $\alpha + \delta_t > |\Phi|$, to ujemna wartość Φ oznacza, że dla ujemnych (dodatnich) obserwacji w czasie $t-1$ maleją (rosną) wartości w czasie t. W przypadku stóp zwrotu oznaczałoby to, że po spadkach notowań następują większe niż oczekiwane spadki, natomiast w przypadku wzrostu notowań następują mniejsze niż oczekiwane wzrosty notowań.

Jeżeli spełnione są warunki (2)-(3), to proces (7) ma następujące własności (Thavaneswaran, Appadoo, 2006):

$$E(y_t) = 0\,, \tag{9}$$

$$E(y_t^2) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2-\sigma_\delta^2-\Phi^2}\,, \tag{10}$$

$$K = \frac{3\left[1-\left(\alpha^2+\sigma_\delta^2+\Phi^2\right)^2\right]}{1-\left[\alpha^4+\Phi^4+6\left[\alpha^2\sigma_\delta^2+\Phi^2\left(\alpha^2+\sigma_\delta^2\right)\right]+3\sigma_\delta^4\right]}. \tag{11}$$

Zatem proces opisany równaniem (7) charakteryzuje się zerową średnią oraz stałą wariancją i kurtozą. Warunek konieczny występowania kurtozy ma postać:

$$\alpha^4+\Phi^4+6\left[\alpha^2\sigma_\delta^2+\Phi^2\left(\alpha^2+\sigma_\delta^2\right)\right]+3\sigma_\delta^4 < 1\,. \tag{12}$$

Jeżeli $\sigma_\delta^2 = 0$ oraz $\Phi = 0$, to wartość kurtozy (11) redukuje się do wartości 3.

Z porównania własności (4)-(6) modelu RCA oraz własności (9)-(11) modelu RCA z funkcją znaku wynika, że wprowadzenie funkcji znaku do modelu RCA powoduje zwiększenie wartości wariancji oraz kurtozy w stosunku do tych wielkości dla procesu opisanego modelem RCA bez funkcji znaku.

3. Modele GARCH z funkcja znaku

Ogólny model GARCH(p, q) opisany jest równaniami:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t\,, \tag{13}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2\,, \tag{14}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$, $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ oraz $\beta_j \geq 0$.

Wzory na teoretyczną wartości kurtozy dla procesów generowanych przez poszczególne modele GARCH, są podawane w literaturze z tego zakresu (np.

Doman, Doman, 2004). Brak jest ogólnego wzoru na wartość kurtozy procesu opisanego równaniami (13)-(14). Poniżej zaprezentowany będzie bardziej ogólny wzór na kutrozę dla wielu modeli z klasy GARCH (tzn. z różnymi rozkładami reszt)

W celu zapisania ogólnego wzoru na kurtozę modelu GARCH bez względu na typ rozkładu model (13)-(14) należy zapisać w postaci ARMA. Jeżeli $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2$ jest różnicą martyngałową o wariancji $\mathrm{var}(u_t) = \sigma_u^2$, to model (16)-(17) może być interpretowany jako model $\mathrm{ARMA(m, q)}$ dla y_t^2 postaci:

$$y_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) y_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j u_{t-j} + u_t \tag{15}$$

lub

$$\phi(B) y_t^2 = \omega + \beta(B) u_t , \tag{16}$$

gdzie $\phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) B^i = 1 - \sum_{i=1}^{m} \phi_i B^i$, $\beta(B) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j B^j$, $m = \max\{p, q\}$, $\alpha_i = 0$ dla $i > q$ oraz $\beta_i = 0$ dla $j > p$.

Warunkami stacjonarności dla y_t^2, który ma reprezentacje ARMA(m,q), są (Thavaneswaran, Appadoo, Samanta, 2005):

(Z.1) Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego $\phi(B) = 0$ leżą poza kołem jednostkowym.

(Z.2) $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$, gdzie ψ_i są współczynnikami wielomianu spełniającego równanie $\psi(B)\phi(B) = \beta(B)$ postaci $\psi(B) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i$.

Założenia te gwarantują nieskorelowanie u_t, średnią zero i skończoną wariancję dla u_t oraz to, że proces y_t^2 jest stacjonarny w szerszym sensie.

Jeżeli model GARCH(p,q) opisany równaniem (16) spełnia warunki (Z.1)-(Z.2) i ma skończony bezwarunkowy moment czwartego rzędu, to kurtozę K procesu y_t^2 opisanego równaniem (16) można zapisać (Thavaneswaran, Appadoo, Samanta, 2005):

$$K = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^4) - [E(\varepsilon_t^4) - 1] \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2} . \tag{17}$$

Wartości parametrów konkretnego modelu są zawarte w poszczególnych wartościach wag. Wyprowadzenia wzorów na wartość kurtozy dla przykładowych modeli GARCH z innowacjami z rozkładu normalnego oraz t-Studenta można znaleść w pracy Górka (2007b).

Funkcja znaku do modeli GARCH została wprowadzona przez Fornari, Mele (1997). Ogólny model $\mathrm{GARCH(p, q)}$ z funkcją znaku opisany jest równaniami:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t , \qquad y_t \big| I_{t-1} \sim N\left(0, \sigma_t^2\right), \tag{18}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^{l} \Phi_k s_{t-k} , \tag{19}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$, $\omega > 0$, $\alpha_i \ge 0$, $\beta_j \ge 0$, s_{t-1} określone jest wzorem (9), zaś $\left|\sum \Phi_k\right| \le \omega$. Ostatni warunek gwarantuje nieujemne wartości $\left\{\sigma_t^2\right\}$.

Podobnie jak dla modelu GARCH (13)-(14), w literaturze przedmiotu podjęte zostały próby znalezienia ogólnego wzoru na kurtozę procesu (Thavaneswaran, Appadoo, 2006). Jednakże, przedstawiony przez Thavaneswaran, Appadoo (2006) ogólny wzór na kurtozę nie daje wyników, w przypadku konkretnych modeli, otrzymanych przez autorkę czy przez Fornari, Mele (1997). Znalezienie ogólnej postaci wzoru na kurtozę procesu GARCH z funkcją znaku, zdaniem autorki, jest możliwe jednakże wymaga jeszcze dalszych badań.

Niech dany będzie model ARCH(1) z funkcją znaku postaci:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t , \qquad \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \Phi s_{t-1} , \tag{20}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, $\omega > 0$, $\alpha_1 \ge 0$, $|\Phi| \le \omega$, zaś s_{t-1} określone jest wzorem (8). Jeżeli $\Phi < 0$, to wówczas dla ujemnych (dodatnich) obserwacji w czasie $t-1$ wzrasta (maleje) wariancja warunkowa w czasie t. Zatem ujemna wartość Φ określa ujemną korelację pomiędzy zmiennością i stopami zwrotu.

Zakładając, że spełnione są warunki stacjonarności dla procesu y_t^2 odpowiadającego równaniom (20), otrzymujemy:

$$E(y_t) = 0 , \tag{21}$$

$$E\left(y_t^2\right) = \frac{\omega}{1-\alpha_1} , \tag{22}$$

$$K = \frac{3\Phi^2 (1-\alpha_1)^2 + 3\omega^2\left(1-\alpha_1^2\right)}{\omega^2\left(1-3\alpha_1^2\right)} . \tag{23}$$

Zatem, funkcja znaku nie wpływa na wartość średnią oraz wartość wariancji bezwarunkowej procesu. Natomiast wartość kurtozy procesu opisanego równaniami (20) ulega zwiększeniu o $\frac{3\Phi^2(1-\alpha_1)^2}{\omega^2\left(1-3\alpha_1^2\right)}$. Nie zmienia się również warunek konieczny istnienia kurtozy (Górka, 2007b), tzn. $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$.

W podobny sposób można otrzymać kurtozę procesu opisanego przez model GARCH(1,1) z funkcja znaku. Niech dany będzie model opisany równaniami:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t , \qquad \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \Phi s_{t-1} , \tag{24}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, $\omega > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$, $|\Phi| \leq \omega$, zaś s_{t-1} określone jest wzorem (8).

Wówczas, przy spełnieniu warunków stacjonarności dla procesu y_t^2, otrzymujemy:

$$E(y_t) = 0, \tag{25}$$

$$E(y_t^2) = \frac{\omega}{1-\alpha_1-\beta_1}, \tag{26}$$

$$K = \frac{3\omega^2\left(1-(\alpha_1+\beta_1)^2\right)+3\Phi^2\left(1-(\alpha_1+\beta_1)\right)^2}{\left(1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2\right)\omega^2}. \tag{27}$$

Podobnie jak w przypadku modelu ARCH(1) z funkcją znaku, w przypadku modelu GARCH(1,1) z funkcją w stosunku do zwykłego (z innowacjami z rozkładu normalnego) modelu GARCH rośnie wartość kurtozy procesu, zaś wartość średnia oraz wariancja bezwarunkowa nie ulega zmianie. Nie ulega również zmianie warunek, przy którym kurtoza procesu istnieje (Górka, 2007b), tzn.: $(\alpha_1+\beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1$.

Reasumując, wprowadzenie funkcji znaku do modeli GARCH powoduje jedynie zwiększenie wartości kurtozy. Jeżeli $\Phi = 0$, to wzory (23) i (33) na kurtoze procesu redukują się do wzorów na kurtozę procesów generowanych przez odpowiednich modele GARCH (Górka, 2007b).

4. Modele RCA GARCH z funkcją znaku

Modele RCA GARCH, w omawianej postaci, zostały zaproponowane przez Thavaneswaran, Appadoo, Samanta (2005). W modelach RCA GARCH, analogicznie jak w przypadku modelu AR, wprowadza się losowość parametru do modelu GARCH (Górka, 2007b; Thavaneswaran, Appadoo, Samanta, 2005). Gdy do modelu RCA GARCH dodana zostanie jeszcze funkcja znaku, to otrzymuje się model RCA GARCH z funkcją znaku. Funkcja ta jest jednak dodana w inny sposób niż w przypadku modeli GARCH z funkcją znaku. Model RCA ARCH(1) z funkcją znaku ma postać:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \ \sigma_t^2 = \omega + (\alpha_1 + a_{t-1} + \Phi s_{t-1}) y_{t-1}^2, \tag{28}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, zaś s_{t-1} określone jest wzorem (8).
Ujemna wartość Φ oznacza, że dla ujemnych (dodatnich) obserwacji w czasie $t-1$ rośnie (maleje) zmienność w czasie t. Jeżeli przyjmiemy $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2$, to równanie wariancji warunkowej ma postać:

$$y_t^2 = \omega + (\alpha_1 + a_{t-1} + \Phi s_{t-1}) y_{t-1}^2 + u_t. \tag{29}$$

Zatem, równanie wariancji w modelu RCA ARCH(1) z funkcją znaku może być interpretowane jako model RCA z funkcją znaku dla y_t^2. Przy założeniu stacjonarności procesu y_t^2 otrzymujemy (por. Thavaneswaran, Appadoo, 2006):

$$E(y_t) = 0, \tag{30}$$

$$E(y_t^2) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \omega}{1 - \sigma_\varepsilon^2 \alpha_1}, \tag{31}$$

$$K = \frac{3(1 - \alpha_1^2 \sigma_\varepsilon^4)}{1 - 3\sigma_\varepsilon^2 (\alpha_1^2 + \sigma_a^2 + \Phi^2)}. \tag{32}$$

W tym przypadku zmieniła się (zwiększyła) tylko wartość kurtozy. Warunek konieczny istnienia kurtozy dla modelu RCA ARCH z funkcja znaku, to $\sigma_\varepsilon^2 (\alpha_1^2 + \sigma_a^2 + \Phi^2) < \frac{1}{3}$. Warto zwrócić uwagę, że warunek ten, w stosunku do warunku na kurtozę procesu generowanego przez model RCA GARCH, zmienił się.

W przypadku losowości parametru stojącego przy y_{t-1}^2 w modelu GARCH(1,1) mamy do czynienia z modelem RCA GARCH(1,1), który zapisuje się w postaci:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \; \sigma_t^2 = \omega + (\alpha_1 + a_{t-1} + \Phi s_{t-1}) y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \tag{33}$$

gdzie $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, zaś s_{t-1} określone jest wzorem (8).

Przy założeniu stacjonarności procesu y_t^2 otrzymujemy:

$$E(y_t) = 0, \tag{34}$$

$$E(y_t^2) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \omega}{1 - \sigma_\varepsilon^2 \alpha_1 - \beta_1}, \tag{35}$$

$$K = \frac{3\left[1 - (\alpha_1 \sigma_\varepsilon^2 + \beta_1)^2\right]}{1 - 2\sigma_\varepsilon^2 \alpha_1 \beta_1 - 3\sigma_\varepsilon^4 (\alpha_1^2 + \sigma_a^2 + \Phi^2) - \beta_1^2}. \tag{36}$$

Dla modelu RCA GARCH z funkcją znaku również ulega podwyższeniu jedynie wartość kurtozy procesu. Warunek konieczny występowania kurtozy dla procesu opisanego modelem RCA GARCH(1,1) z funkcją znaku wynosi $2\sigma_\varepsilon^2 \alpha_1 \beta_1 + 3\sigma_\varepsilon^4 (\alpha_1^2 + \sigma_a^2 + \Phi^2) + \beta_1^2 < 1$.

W każdym, z przedstawionych przypadków wprowadzenie funkcji znaku prowadziło do podwyższenia wartości kurtozy procesu. Dla $\Phi = 0$ wzory (32) i (36) na kurtozę procesu redukują się do wzorów na kurtozę procesów generowanych przez odpowiednich modele RCA GARCH (Górka, 2007b).

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono wybrane modele z funkcją znaku, pozwalające na opis niesymetrycznej reakcji zmienności (lub, w przypadku modelu RCA stóp zwrotu) na pojawienie się pozytywnych i negatywnych informacji. Wartość parametru przy funkcji znaku, dla każdego przedstawianego modelu, ma wpływ na wartość kurtozy procesu powodując jej zwiększenie. Warunki konieczne istnienia kurtozy procesu, wskazują na ograniczenia stosowania rozkładu normalnego dla innowacji w przedstawianych modelach.

Literatura

Appadoo, S.S., Thavaneswaran, A., Singh, J. (2006), RCA Models with Correlated Errors, *Applied Mathematics Letters*, 19, 824–829.

Aue, A. (2004), Strong Approximation for RCA(1) Time Series with Applications, *Statistics & Probability Letters*, 68, 369–382.

Bollerslev, T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307–327.

Brzeszczyński, J., Kelm, R. (2002), *Ekonometryczne modele rynków finansowych.* WIG-Press, Warszawa.

Engle, R. F. (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50, 987–1006.

Doman, M., Doman, R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego,* Wyd. AE w Poznaniu, Poznań.

Fiszeder, P. (2001), Zastosowanie modeli GARCH w analizie krótkookresowych zależności pomiędzy Warszawską Giełdą Papierów Wartościowych a międzynarodowymi rynkami akcji, *Przegląd Statystyczny*, Zeszyt 3–4, 345–364.

Fornari, F., Mele, A. (1997), Sign- and Volatility-Switching Arch Models: Theory and Applications to International Stock Markets, *Journal of Applied Econometrics*, 12, 49–65.

Górka, J. (2007a), Modele autoregresyjne z losowymi parametrami, w: Osińska M. (red.), *Procesy STUR. Modelowanie i zastosowanie do finansowych szeregów czasowych*, Wydawnictwo TNOiK, Toruń.

Górka J., (2007b), Kurtoza w procesach generowanych przez model RCA GARCH, *Modelowanie i Prognozowanie Gospodarki Narodowej*, w druku.

Lee, S. (1998), Coefficient Constancy Test in a Random Coefficient Autoregressive Model, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 74, 93–101.

Nicholls, D.F., Quinn, B.G. (1982), *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*, Springer, New York.

Thavaneswaran, A., Appadoo, S.S. (2006), Properties of a New Family of Volatility Sing Models, *Computers and Mathematics with Applications*, 52, 809–818.

Thavaneswaran,, A., Appadoo, S.S., Samanta, M. (2005), Random Coefficient GARCH Models, *Math. Comput. Modelling*, 41, 723–733.