

## Wpływ doboru metod rekonstrukcji przestrzeni fazowej na efektywność prognozowania chaotycznych szeregów czasowych

### 1. Rekonstrukcja przestrzeni fazowej

Kluczową rolę w teorii chaosu deterministycznego pełni pojęcie systemu dynamicznego. Formalnie, przez system dynamiczny rozumie się parę  $(S, f)$ , gdzie  $S \subset \mathbb{R}^d$  jest przestrzenią stanów, zaś  $f: S \rightarrow S$  odwzorowaniem opisującym ich ewolucję w czasie (por. Zawadzki (1996)). Analizując szereg czasowy przy użyciu metodologii teorii chaosu, przyjmuje się, że został on wygenerowany przez pewien system dynamiczny  $(S, f)$ . Pierwszym etapem badania jest rekonstrukcja przestrzeni fazowej  $S$ . Jej celem jest wydobycie z szeregu pewnych informacji o nieobserwowalnych stanach generującego go systemu oraz ich dynamice. Najpopularniejszą metodą rekonstrukcji jest metoda opóźnień, w której buduje się wektory opóźnień (tzw.  $m$ -historie) postaci  $\hat{x}_t^m = (x_t, x_{t-1.lag}, \dots, x_{t-(m-1).lag})$ . Jej podstawą teoretyczną jest twierdzenie Takensa, które głosi, że dla  $m \geq 2d + 1$  przestrzeń  $(\hat{S}, F)$ , gdzie  $\hat{S}$  jest zbiorem  $m$ -historii, zaś  $F$  odwzorowaniem opisującym ich dynamikę, tzn.  $F(\hat{x}_t^m) = \hat{x}_{t+1}^m$ , może zostać wykorzystana do zbadania własności nieznanego systemu  $(S, f)$ . W szczególności możliwe jest wyznaczenie wymiaru atraktora i wykładników Lapunowa oraz prognozowanie (por. Castagli i in. (1991)).

Metoda opóźnień wymaga przyjęcia *a priori* wartości zanurzenia  $m$  oraz opóźnienia czasowego  $lag$ . Dobór tych parametrów jest szczególnie istotny w przypadku krótkich szeregów, w których obecny jest szum losowy (por. Bask (1998), Castagli i in. (1991), Zeng i in. (1991)). Najczęściej stosowaną procedurą doboru wymiaru zanurzenia jest metoda „Fałszywych Najbliższych Sąsiadów” („False Nearest Neighbors” - FNN) (Kennel i in. (1992)). Metoda polega na obliczaniu ilości tzw. fałszywych sąsiadów w zależności od parametru  $m$ , według następujących etapów:

-) dla każdych  $m$ -historii  $\hat{x}_{t_1}^m$  i  $\hat{x}_{t_2}^m$  wyznacza się  $\|\hat{x}_{t_1}^m - \hat{x}_{t_2}^m\|$ , (1)

-) oblicza się współczynnik  $d_m = \frac{\|\hat{x}_{t_1}^{m+1} - \hat{x}_{t_2}^{m+1}\|}{\|\hat{x}_{t_1}^m - \hat{x}_{t_2}^m\|}$ . (2)

Jeśli  $d_m$  przekracza pewien przyjęty poziom, wówczas uznaje się, że  $\hat{x}_{t2}^m$  jest fałszywym sąsiadem wektora  $\hat{x}_{t1}^m$ . Za parametr  $m$  należy przyjąć wartość, dla której minimalizowana jest ilość fałszywych sąsiadów.

Często stosowanym kryterium doboru  $lag$  jest metoda „Mutual Information” (MI), w której system rozważany jest w kategorii produkcji informacji. Istotą metody jest zmierzenie, ile bitów informacji otrzymywanej w stanie  $s(t + lag)$  może być wynikiem predykcji opartej na informacji zawartej w stanie  $s(t)$  (por. Łażewski, Zator (2002)). W tym celu Fraser i Swinney (1986) proponują przyjęcie poziomu opóźnienia czasowego, dla którego funkcja  $I(lag)$  zwana funkcją „mutual information” przyjmuje pierwsze minimum.

## 2. Lokalna aproksymacja liniowa

Chaotyczne szeregi czasowe różnią się od prawdziwie losowych możliwością ich bardzo dokładnego prognozowania, w krótkim horyzoncie czasowym. Z twierdzenia Takensa wynika, że dla  $m \geq 2d + 1$  istnieje funkcja  $g_T : R^m \rightarrow R$ , dla której:

$$x_{t+T} = g_T(\hat{x}_t^m) \equiv g_T(x_t, x_{t-lag}, \dots, x_{t-(m-1)lag}). \quad (3)$$

Oznacza to, że mając szereg długości  $N$  można wyznaczyć prognozę:

$$x_{N+T} = g_T(\hat{x}_N^m) \equiv g_T(x_N, x_{N-lag}, \dots, x_{N-(m-1)lag}), \quad (4)$$

gdzie  $T$  jest horyzontem prognozy. Funkcja  $g_T$  może mieć skomplikowany nieliniowy wzór analityczny, jednak zastąpienie jej pewną aproksymantą  $\tilde{g}_T$  określonego typu, może dawać zadawalające wyniki prognoz. Metoda lokalnej aproksymacji liniowej LA polega na przyjęciu za  $\tilde{g}_T$   $m$ -wymiarowej funkcji wielomianowej stopnia pierwszego:

$$\tilde{g}_T(x_1, x_2, \dots, x_m) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m. \quad (5)$$

Estymacja parametrów  $\alpha_i$  poprzedzona jest wyborem  $k$  wektorów opóźnień, najbliższych (w sensie ustalonej metryki) wektorowi  $\hat{x}_N^m$ . W oparciu o wyznaczonych sąsiadów, przy użyciu metody najmniejszych kwadratów, dokonuje się estymacji współczynników  $\tilde{g}_T$ . Przyjmowana *a priori* liczba  $k$  może być mniejsza od liczby wszystkich dostępnych  $m$ -historii, stąd nazwa „aproksymacja lokalna”. Otrzymane prognozy zależą od liczby najbliższych sąsiadów –  $k$ , wymiaru zanurzenia –  $m$  i opóźnienia czasowego –  $lag$ .

## 3. Wyniki prognoz

Prognozowaniu poddano szeregi chaotyczne wygenerowane przez:

1. Odwzorowanie logistyczne:

$$x_{t+1} = 4 \cdot x_t \cdot (1 - x_t), \text{ dla } x_0 = 0,7. \quad (6)$$

2. Odwzorowanie Henona (szereg pierwszych współrzędnych):

$$(x_{t+1}, y_{t+1}) = (1 - 1,4x_t^2 + y_t; 0,3x_t), \text{ dla } (x_0, y_0) = (0,9; 0,9). \quad (7)$$

3. System Lorenza:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 16 \cdot (y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= -x \cdot z + 45,92 \cdot x - y \\ \frac{dz}{dt} &= x \cdot y - 4 \cdot z \end{aligned} \quad (8)$$

Wygenerowano szereg postaci  $x_t = x(t \cdot 0,01)$ , dla  $(x(0), y(0), z(0)) = (1,1,1)$ .

4. Model Kaldora:

Prognozowaniu poddano szereg  $(Y_t)$  wygenerowany z modelu Kaldora:

$$\begin{aligned} Y_{t+1} - Y_t &= \alpha (I_t(Y_t, K_t) - S_t(Y_t)) \\ K_{t+1} - K_t &= I_t(Y_t, K_t) - \delta K_t \end{aligned} \quad (9)$$

po przyjęciu założeń, że  $S_t(Y_t) = s \cdot Y_t$ , zaś funkcja inwestycji jest postaci:

$$I_t = c \cdot 2^{-1/(dY_t + \varepsilon)^2} + e \cdot Y_t + a \cdot \left( \frac{f}{K_t} \right)^g. \quad (10)$$

W badaniu przyjęto parametry prowadzące do ewolucji chaotycznej:  $\alpha = 20$ ,  $s = 0,21$ ,  $\delta = 0,05$ ,  $a = 5$ ,  $c = 20$ ,  $d = 0,01$ ,  $\varepsilon = 0,00001$ ,  $e = 0,05$ ,  $f = 280$ ,  $g = 4,5$  oraz wartości początkowe  $Y_0 = 65$ ,  $K_0 = 265$  (por. Lorenz (1989)).

Analizowane szeregi składające się z 1900 obserwacji podzielono na dwie części: próbkę A – 1715 pierwszych obserwacji, próbkę B – 185 ostatnich obserwacji. Dla każdej obserwacji  $x_i$  z próbki B ( $i = 1716, 1717, \dots, 1900$ ) wyznaczono prognozę dla horyzontu czasowego  $T = 1$ :

$$\tilde{x}_i = \tilde{g}_1(\hat{x}_{i-1}^m) \equiv \tilde{g}_1(x_{i-1}, x_{i-1-lag}, \dots, x_{i-1-(m-1)lag}). \quad (11)$$

Próbkę A wykorzystano do obliczenia parametrów  $m$  oraz  $lag$ , oraz do oszacowania współczynników wielomianu  $\tilde{g}_1$ . W badaniu rozważono kolejne  $k = m+2, \dots, 1714 - (m-1) \cdot lag$ . Do oceny dokładności prognozy wyznaczono dla każdego  $k$  bezwzględny błąd predykcji ex-post:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{185} \cdot \sum_{i=1716}^{1900} (x_i - \tilde{x}_i)^2} \quad (12)$$

oraz względny błąd prognozy  $\sigma' = \sigma / \sigma_x \cdot 100\%$  (por. Farmer, Sidorowich (1987)), gdzie  $\sigma_x$  jest odchyleniem standardowym szeregu z próbki A.

Zastosowano dwie procedury doboru parametrów zrekonstruowanej przestrzeni stanów: „FNN-MI” i „PROG”:

1. „FNN-MI”:

W oparciu o próbkę A, przy zastosowaniu metody FNN wyznaczono wartość wymiaru zanurzenia  $m$ , zaś przy użyciu metody MI – opóźnienie czasowe  $lag$ .

2. „PROG”:

Próbkę A podzielono na dwie części:  $A_1=1650$  pierwszych obserwacji i  $A_2=65$  ostatnich obserwacji. Dla każdej obserwacji z  $A_2$  dokonano predykcji metodą LA, wykorzystując  $A_1$  do oszacowania wielomianu aproksymującego. Prognozy wyznaczono dla kolejnych  $lag=1,2,\dots,5$ ,  $m=1,2,\dots,15$ ,  $k=m+2, \dots, 1649-(m-1)\cdot lag$ . Spośród rozważonych parametrów wybrano takie wartości  $m$  i  $lag$ , dla których otrzymana prognoza była najdokładniejsza.

Najmniejsze błędy prognoz wraz z wyznaczonymi parametrami przestrzeni fazowej zostały podsumowane w tabelach 1-4. Wykresy 1-4 przedstawiają zależność bezwzględnego błędu prognozy od wartości parametru  $k$ .

Tabela 1. Najmniejsze błędy prognoz dla odwzorowania logistycznego

| Metoda    | $\sigma$    | $\sigma'$     | Parametry    | Optymalne $k$ |
|-----------|-------------|---------------|--------------|---------------|
| LA PROG   | $10^{-7}$   | $10^{-5}\%$   | $m=2, lag=1$ | $k=6$         |
| LA FNN-MI | $10^{-5}$   | <b>0,002%</b> | $m=1, lag=7$ | $k=4$         |
| ARMA      | <b>0,33</b> | <b>96,03%</b> | Biały szum   |               |

Źródło: obliczenia własne

Tabela 2. Najmniejsze błędy prognoz dla szeregu Henona

| Metoda    | $\sigma$    | $\sigma'$     | Parametry     | Optymalne $k$ |
|-----------|-------------|---------------|---------------|---------------|
| LA PROG   | $10^{-4}$   | <b>0,01%</b>  | $m=4, lag=1$  | $k=7$         |
| LA FNN-MI | <b>0,19</b> | <b>25,50%</b> | $m=1, lag=18$ | $k=16$        |
| ARMA      | <b>0,63</b> | <b>85,59%</b> | ARMA(2,6)     |               |

Źródło: obliczenia własne

Tabela 3. Najmniejsze błędy prognoz dla systemu Lorenza

| Metoda    | $\sigma$     | $\sigma'$    | Parametry      | Optymalne $k$ |
|-----------|--------------|--------------|----------------|---------------|
| LA PROG   | <b>0,004</b> | <b>0,03%</b> | $m=14, lag=1$  | $k=34$        |
| LA FNN-MI | <b>0,383</b> | <b>3,00%</b> | $m=15, lag=10$ | $k=107$       |
| ARMA      | <b>0,008</b> | <b>0,06%</b> | ARMA(5,4)      |               |

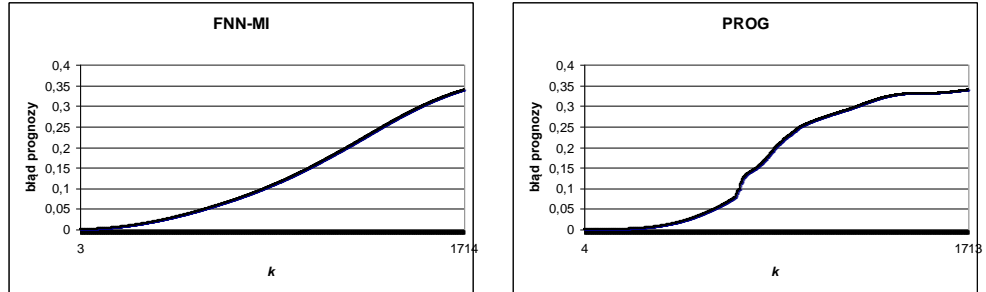
Źródło: obliczenia własne

Tabela 4. Najmniejsze błędy prognoz dla modelu Kaldora

| Metoda    | $\sigma$     | $\sigma'$     | Parametry    | Optymalne $k$ |
|-----------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| LA PROG   | <b>0,11</b>  | <b>0,41%</b>  | $m=2, lag=1$ | $k=6$         |
| LA FNN-MI | <b>1,86</b>  | <b>7,13%</b>  | $m=3, lag=3$ | $k=13$        |
| ARMA      | <b>17,28</b> | <b>66,45%</b> | ARMA(2,3)    |               |

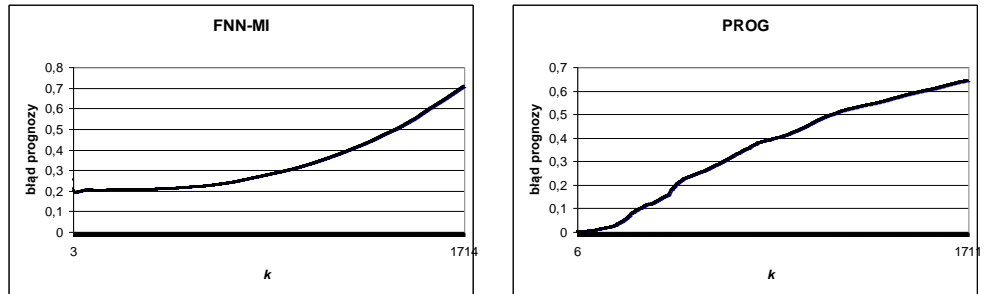
Źródło: obliczenia własne

Rys. 1. Błędy prognoz dla odwzorowania logistycznego



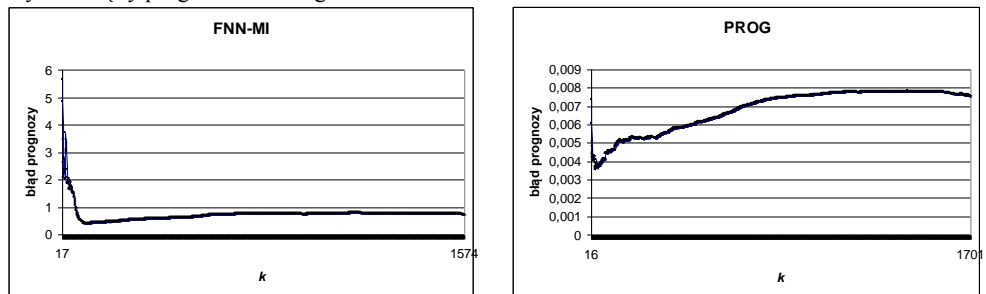
Źródło: obliczenia własne

Rys. 2. Błędy prognoz dla szeregu Henona



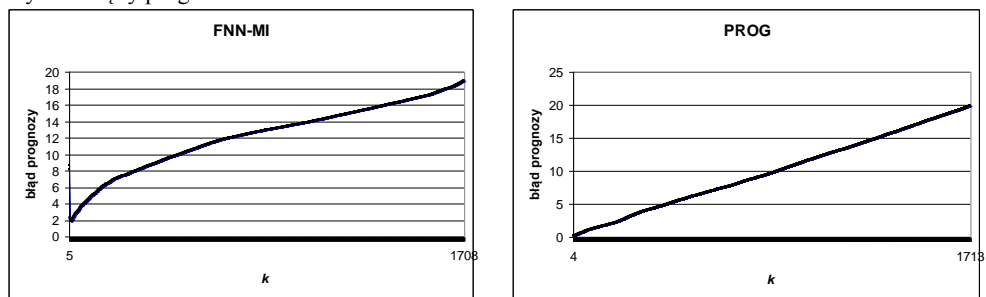
Źródło: obliczenia własne

Rys. 3. Błędy prognoz dla szeregu Lorenza



Źródło: obliczenia własne

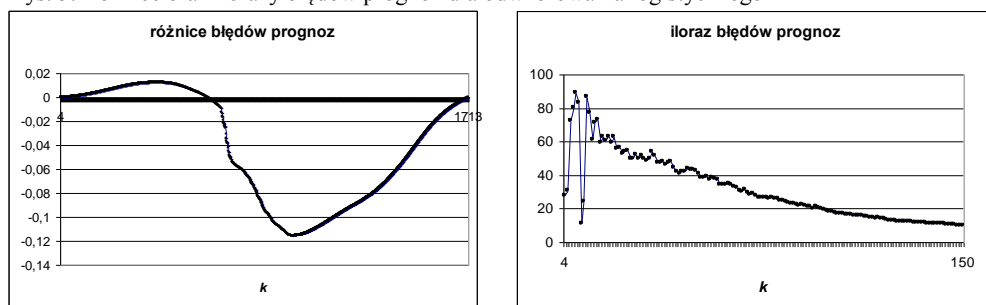
Rys. 4. Błędy prognoz dla modelu Kaldora



Źródło: obliczenia własne

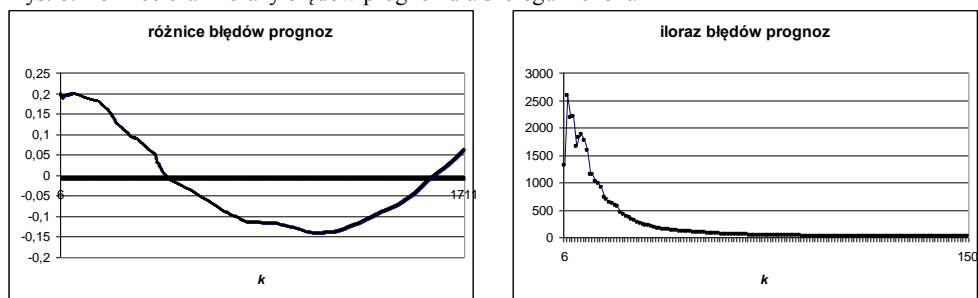
Na wykresach 5-8 przedstawiono różnice i ilorazy błędów prognoz otrzymanych przy zastosowaniu procedur FNN-MI i PROG dla kolejnych wartości  $k$ . Dodatnia różnica oznacza wyższość procedury PROG. Z wykresów ilorazów błędów można odczytać, ile razy błąd otrzymany przy zastosowaniu procedury PROG jest mniejszy od błędu FNN-MI. Ponieważ z punktu widzenia prognozowania szeregów chaotycznych istotne są niewielkie wartości  $k$  (por. Castagli (1992)), dlatego wykresy ilorazów błędów zostały ograniczone do  $k \leq 150$ .

Rys. 5. Różnice oraz ilorazy błędów prognoz dla odwzorowania logistycznego



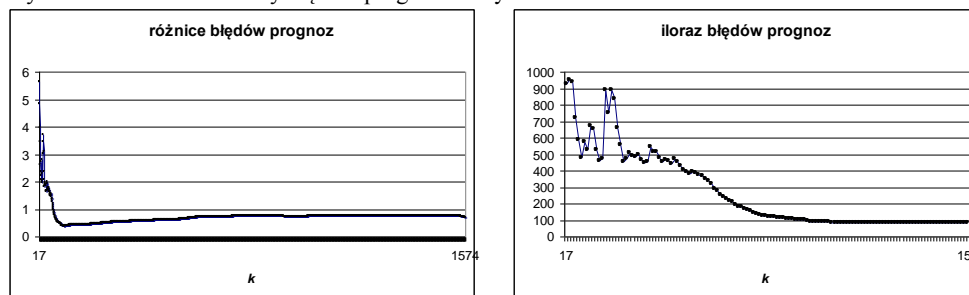
Źródło: obliczenia własne

Rys. 6. Różnice oraz ilorazy błędów prognoz dla szeregu Henona



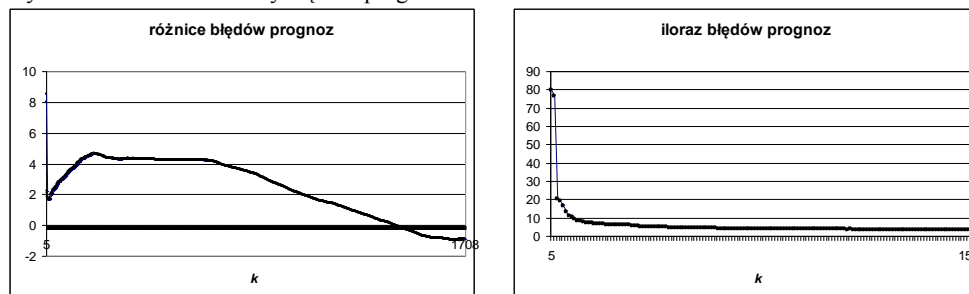
Źródło: obliczenia własne

Rys. 7. Różnice oraz ilorazy błędów prognoz dla systemu Lorenza



Źródło: obliczenia własne

Rys. 8. Różnice oraz ilorazy błędów prognoz dla modelu Kaldora



Źródło: obliczenia własne

W tabeli 5 zaprezentowano wartości  $k$ , dla których przeważa procedura PROG, a także minimalne i maksymalne ilorazy błędów prognoz dla  $k \leq 150$ .

Tabela 5. Porównanie procedur PROG i FNN-MI

| Szereg                   | Przewaga procedury PROG | Zakres ilorazów błędów prognoz |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| Odwzorowanie logistyczne | $k < 621$               | od 10,09 do 89,30              |
| Szereg Henona            | $k < 452$               | od 10,43 do 2590,65            |
| System Lorenza           | $k$ dowolne             | od 83,21 do 953,66             |
| Model Kaldora            | $k < 1421$              | od 3,36 do 79,59               |

Źródło: obliczenia własne

#### 4. Wnioski

Z przeprowadzonych badań wynika, że chaotyczne szeregi czasowe mogą być prognozowane w krótkim horyzoncie czasowym z bardzo dużą dokładnością. W zastosowaniu do analizowanych szeregów lokalna aproksymacja liniowa dała prognozy wyraźnie lepsze niż modele ARMA. Wyjątkiem był jedynie szereg Lorenza, gdzie wyższość metody zależała od przyjętej procedury doboru parametrów zrekonstruowanej przestrzeni stanów.

Zauważalny jest wpływ zastosowanej metody doboru parametrów na dokładność prognozowania. Dla każdego szeregu procedura FNN-MI prowadziła do prognoz dużo gorszych niż procedura PROG. Badania pokazują, że błędy predykcji istotnie zależą również od trzeciego parametru – liczby najbliższych sąsiadów  $k$  wykorzystanych do estymacji współczynników wielomianu aproksymującego. W przypadku prognozowania chaotycznych szeregów czasowych metodą LA, najmniejsze błędy otrzymuje się dla niewielkich wartości  $k$ . Z przeprowadzonych prognoz wynika, że w takich sytuacjach wyraźnie zauważalna jest wyższość procedury „PROG”, a zatem metody FNN i MI wyznaczają parametry dalekie od optymalnych.

## Literatura

- Bask M. (1998), *Esseys on exchange rates: deterministic chaos and technical analysis*, maszynopis.
- Castagli M. (1991), Eubank S., Farmer J.D., Gibson J., State space reconstruction in the presence of noise, *Physica D*, 51,.
- Casdagli M. (1992), Chaos and Deterministic versus Stochastic Non-linear Modelling, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 54, no. 2.
- Farmer J.D. (1987), Sidorowich J.J., Predicting Chaotic Time Series, *Physical Review Letters*, 59.
- Fraser A.M., Swinney H.L. (1986), Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information, *Physical Review A*, 33.
- Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.I. (1992), Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction, *Physical Review A*, vol.45, no. 6.
- Lorenz H-W. (1989), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer – Verlag, Berlin Heidelberg.
- Łażewski M., Zator K. (2002), *Analiza chaosu deterministycznego w szeregach czasowych cen akcji pozbawionych trendu a prognozowanie rynków finansowych*, w: Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie. red. W. Tarczyński, Szczecin.
- Takens F. (1981), *Detecting Strange Attractors in Turbulence*, (D. Rand and L.Young, Eds), w: *Dynamical Systems and Turbulence*, Springer-Verlag.
- Zawadzki H. (1996), *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego, Katowice.
- Zeng X., Pielke R.A., Eykholt R. (1992), Extracting Lyapunov exponents from short time series of low precision, *Modern Physics Letters B*, 6.